УДК 532.32

Условия устойчивости и неустойчивости системы слоев неоднородных тяжелых сжимаемых жидкостей

Е.И. Рыжак, Ш.А. Мухамедиев, С.В. Синюхина
Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, Москва.

В работе рассматривается обобщение классической задачи Рэлея на случай сжимаемых идеальных (баротропных) жидкостей, причем распределение их плотностных свойств и сжимаемостей по глубине считается произвольным. Анализ устойчивости проводится на основе статического энергетического критерия для ограниченной области произвольной формы с учетом граничных условий на всех частях границы. Получены почти совпадающие между собой (с точностью до строгости соответствующих неравенств) необходимое и достаточное условия устойчивости; полученные условия справедливы и для произвольного числа слоев. Дополнительно рассматривается возможное влияние вязкости жидкостей, а также случай, когда слои могут состоять из твердых упругих материалов. При наличии неустойчивости (как в случае сжимаемой идеальной, так и в случае сжимаемой вязкой жидкости) получены оценки снизу для наибольшей скорости роста форм потери устойчивости.

1. Пионерская работа Рэлея [1], опубликованная в 1883 г., представляла собой попытку теоретического обоснования высказанных ранее предположений о механизме некоторого атмосферного явления, а именно, образования перистых облаков. Рэлей рассматривал систему несжимаемых идеальных жидкостей в поле силы тяжести. Система считалась бесконечно протяженной и в горизонтальных, и в вертикальном направлениях; что касается распределения плотности, то были рассмотрены два случая: (1) слоя два, и они однородны; (2) слой один, а распределение плотности по глубине – экспоненциальное. В этих предположениях Рэлею удалось (в определенной степени) обосновать следующий результат: система несжимаемых жидкостей с инверсией плотности неустойчива. В дальнейшем и вплоть до настоящего времени модель Рэлея воспроизводилась с теми или иными вариациями в целом ряде работ и использовалась для теоретического анализа различных физических явлений. При этом основные особенности постановки задачи и метода ее решения не претерпели никаких изменений по сравнению с работой [1], что и послужило, по мнению авторов, причиной того, что корректные, доказательные и достаточно общие результаты получены так и не были.

Модификации и обобщения модели в основном касались свойств жидкости, и наиболее важным с точки зрения механики обобщением явилось добавление свойства упругой сжимаемости жидкостей (см., например, [2-5]). Вопрос об устойчивости и неустойчивости системы сжимаемых жидкостей во всех этих и ряде других работ рассматривался в весьма частной постановке, адекватность которой вызывает большие сомнения (все та же безграничность области по всем трем направлениям и отсутствие граничных условий на бесконечности в горизонтальных направлениях, частный характер неоднородности по плотности, однородность упругих свойств в пределах каждого слоя, рассмотрение задачи в асимтотике малой сжимаемости и т. д.), однако и в такой постановке он так и остался нерешенным (см. обсуждение в работе [5]).

В данной работе анализ устойчивости проводится для ограниченной области произвольной формы и с учетом граничных условий (ГУ) на всех частях границы (заметим, что ГУ зачастую играют в высшей степени принципиальную роль в задачах устойчивости). Жидкости в каждом из слоев считаются сжимаемыми идеальными, причем распределение их плотностных и упругих свойств по глубине также считается произвольным. Метод исследования устойчивости в данной работе совершенно иной, чем во всех цитируемых работах, в которых рассматриваются обобщения задачи Рэлея: используется статический энергетический критерий устойчивости/неустойчивости в сочетании с отсчетным («лагранжевым») описанием сплошной среды, что и позволило решить задачу в общей постановке и полностью, а именно, получить почти совпадающие между собой необходимое и достаточное условия устойчивости.

В дополнение к решению основной задачи о сжимаемых идеальных жидкостях, рассматриваются важные для приложений вопросы о возможном влиянии вязкости жидкостей и о влиянии ненулевой сдвиговой жесткости материала.

2. Изучаемая механическая система представляет собой резервуар, открытый сверху и частично заполненный неоднородной тяжелой жидкостью (рис. 1). Резервуар имеет произвольную форму. В равновесном состоянии, исследуемом в дальнейшем на устойчивость, имеются два горизонтальных слоя жидкости, на границе раздела которых плотность и упругие свойства меняются скачкообразно; при этом

в каждом из слоев плотность и упругие свойства меняются с глубиной непрерывно и кусочно гладко (а в остальном – произвольно). Верхняя граница верхнего слоя свободна, с боков и снизу система жидкостей ограничена неподвижной внутренней поверхностью резервуара, на которой принимаются ГУ свободного проскальзывания жидкости. Граница раздела слоев в исходном равновесном состоянии горизонтальна, она может двигаться и деформироваться произвольно, причем частицы жидкости каждого из слоев свободно и независимо друг от друга проскальзывают (каждая со своей стороны) вдоль этой общей поверхности.

Кинематические условия проскальзывания на внутренней поверхности резервуара и взаимного проскальзывания на границе раздела жидкостей представляют собой совокупность кинематических связей, наложенных на исследуемую механическую систему и определяющих класс ее кинематически допустимых смещений при отклонениях от равновесного состояния.

В работе используется отсчетное описание рассматриваемых сплошных сред (см. напр. [6]). В качестве отсчетной конфигурации κ (которая по самому смыслу отсчетного описания считается неизменной) принимается исследуемая на устойчивость равновесная конфигурация системы. Материальные точки идентифицируются с помощью их радиус-векторов $\mathbf{x}$ в отсчетной конфигурации. Текущее положение материальной точки $\mathbf{x}$ задается значением отображения $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{x}, t)$, которое будем называть «трансформацией»; здесь t – виртуальное время (в дальнейшем для краткости называемое просто временем), $\mathbf{r}(\mathbf{x}, t)$ – радиус-вектор данной материальной точки в данный момент времени; отсчетная конфигурация совпадает с актуальной при $t = 0$:

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{x} \tag{1}$$

Область, занимаемую жидкостью в отсчетном равновесном состоянии, обозначим через B; слои, занимаемые, соответственно, нижней и верхней жидкостями, обозначим через B_- и B_+, $B = B_- \cup B_+$. Обозначим свободную верхнюю часть границы верхнего слоя через Σ_+, поверхность раздела слоев через Σ_{+-}, внутреннюю поверхность резервуара через Σ_s (рис. 1). Зададим ортонормированный базис $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, где орт $\mathbf{e}_3$ направлен вертикально вверх, а также отсчетную вертикальную координату z (глубину), отсчитываемую от Σ_+ вниз (рис. 1).

Для представления тензорных величин и операций в работе используется модифицированная система безындексных обозначений Дж. В. Гиббса (для справок может быть использовано учебное пособие [7], а также работа [8]).

Будем исходить из следующих статических энергетических определений устойчивости и неустойчивости в малом: (1) равновесное состояние консервативной механической системы устойчиво в малом, если при любых кинематически допустимых малых смещениях по отношению к положению равновесия приращение ее полной потенциальной энергии (ППЭ) неотрицательно; (2) равновесное состояние консервативной механической системы неустойчиво в малом, если при каких-либо кинематически допустимых малых смещениях по отношению к положению равновесия приращение ее ППЭ отрицательно.

Упомянутая ППЭ является суммой упругой энергии среды и ее гравитационной энергии:

$$\begin{aligned} &U\{\mathbf{r}(\mathbf{x}, t)\} = \\ &\quad = \langle \sigma_\kappa(\nabla_\kappa \otimes \mathbf{r}(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}) \rangle_B + \langle \rho_\kappa(\mathbf{x})\, g\, \mathbf{r}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{e}_3 \rangle_B \end{aligned} \tag{2}$$

где угловые скобки обозначают интегрирование по отсчетному множеству, указанному справа внизу, $\sigma_\kappa(\mathbf{F}(\mathbf{x}, t), \mathbf{x})$ – объемная плотность упругой энергии (упругий потенциал) по отношению к равновесной (нагруженной) отсчетной конфигурации, $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \equiv \nabla_\kappa \otimes \mathbf{r}(\mathbf{x}, t)$ – отсчетный (т. е. по $\mathbf{X}$) градиент трансформации, $\rho_\kappa(\mathbf{x})$ – отсчетное распределение плотности (фактически для жидкости в силу равновесия в гравитационном поле $\rho_\kappa(\mathbf{x}) = \rho_\kappa(z)$, где z – глубина). Для неоднородной баротропной жидкости зависимость упругого потенциала от $\mathbf{F}$ сводится к зависимости от $\det \mathbf{F}$:

$$\sigma_\kappa = \sigma_\kappa(\det \mathbf{F}, \mathbf{x}), \tag{3}$$

причем явная зависимость от $\mathbf{x}$ имеет место и для физически однородной жидкости в силу неоднородности отсчетного состояния.

Из равновесности этого состояния следует, что первая вариация ППЭ по отношению к нему равна нулю, а знак приращения ППЭ при малых возмущениях определяется знаком ее второй вариации (по крайней мере в тех случаях, когда последняя не равна нулю). Заметим, что вторая вариация получается двукратным дифференцированием ППЭ по времени и изначально содержит как слагаемые, зависящие от виртуальных скоростей, так и слагаемые, зависящие от виртуальных ускорений (далее уточнение «виртуальные» будем опускать), но затем ускорения исключаются, и вторая вариация преобразуется в квадратичный функционал $R\{\mathbf{v}\}$, зависящий от поля допустимых скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)=\dot{\mathbf{r}}(\mathbf{x},t)$ при $t=0$.

При выводе того «канонического» представления функционала $R\{\mathbf{v}\}$, которое позволяет судить о его знаке, используются кинематические ГУ как для скоростей $\mathbf{v}$, так и для ускорений $\dot{\mathbf{v}}$ на поверхностях Σ_+, Σ_{+-} и Σ_s. Используются также известные формулы нелинейной теории упругости, выражающие напряжения и упругие модули через упругий потенциал $\sigma_к(\mathbf{F},\mathbf{x})$.

В результате многочисленных и довольно сложных выкладок (которые не могут быть приведены в рамках краткой статьи) получаем следующее выражение:

$$R\{\mathbf{v}\}=\left\langle \rho_к\, g\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_3)^2\right\rangle_{\Sigma_+}+\left\langle -[\rho_к] g\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_3)^2\right\rangle_{\Sigma_{+-}}+ \\ +\left\langle \left(\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)_p g\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_3)^2\right\rangle_B+\left\langle K\,(\nabla_к\cdot\mathbf{v}-\frac{\rho_к\, g}{K}\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_3)^2\right\rangle_B \tag{4}$$

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)_p=\frac{d\rho_к}{dz}-\frac{\rho_к{}^2 g}{K},\quad \rho_к(z)=\rho(z,p_к(z)), \tag{5}$$

где $[\rho_к]\equiv(\rho_{к+}-\rho_{к-})\big|_{\Sigma_{+-}}$, $\left(\dfrac{\partial\rho}{\partial z}\right)_p$ – производная плотности по глубине при постоянном давлении $p=const$, т. е. та скорость нарастания плотности с глубиной, которая связана не с равновесным нарастанием давления с глубиной, а именно с физической неоднородностью распределения жидкости по глубине; заметим, что для физически однородной жидкости $\left(\dfrac{\partial\rho}{\partial z}\right)_p=0$. Модуль объемного сжатия K связан с зависимостью плотности от давления (на заданной глубине в отсчетной конфигурации) следующим равенством:

$$\frac{1}{K(z)}=\frac{1}{\rho(z,p)}\frac{\partial\rho(z,p)}{\partial p}\bigg|_{p=p_к(z)}, \tag{6}$$

а $p_к(z)$ определяется уравнением равновесия

$$\frac{dp_к}{dz}(z)=\rho_к(z)g \tag{7}$$

Очевидно, что в (4) первый и четвертый интегралы неотрицательны. Если

$$-[\rho_к]\ge 0 \tag{8}$$

(т.е. инверсия плотности на границе раздела отсутствует) и

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)_p\ge 0\quad,\forall z \tag{9}$$

то $R\{\mathbf{v}\}\ge 0$, т. е. функционал положительно полуопределен.

В случае нарушения любого из неравенств (8), (9) система неустойчива, т.е. существуют ФПУ $\mathbf{v}(\mathbf{x})$, такие, что $R\{\mathbf{v}\}<0$.

Доказательство данного утверждения сводится к предъявлению соответствующих ФПУ.

Уточним, что нарушения могут быть двух типов:

1) $-[\rho_к]<0$,

2) существует диапазон глубин, в котором

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)_p<0\quad\Leftrightarrow\quad\frac{d\rho_к}{dz}<\frac{\rho_к^2 g}{K} \tag{10}$$

Заметим, что если производная $d\rho_к/dz$ положительна, но недостаточно велика, то система все равно неустойчива.

Нарушению каждого из неравенств (8) и (9) соответствует свой тип ФПУ. Построение и результирующий вид упомянутых ФПУ двух типов в данной краткой статье не приводятся. При их построении принимались более сильные кинематические ГУ, чем условия проскальзывания, а именно, условия отсутствия смещений на Σ_S и отсутствия относительных смещений на Σ_{+-}, что делает в принципе возможным распространение результата на случай сжимаемых материалов с вязкостью, поскольку они удовлетворяют именно таким кинематическим ГУ.

Что касается достаточных условий устойчивости, то они отличаются от необходимых наличием следующего дополнительного свойства: функционал $R\{\mathbf{v}\}$ не только положительно полуопределен, но еще и в нуль обращается только на таких полях виртуальных скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{x})$, которые соответствуют квазистатическим движениям системы жидкостей. Наличие этого дополнительного свойства может быть доказано в следующих трех случаях:

1) строгое неравенство $\left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)_p > 0$ выполняется на всех глубинах, а взятый с противоположным знаком скачок плотности неотрицателен;

2) обе жидкости физически однородны (тогда $\left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)_p = 0$), а для скачка плотности выполняется строгое неравенство $-[\rho_\text{к}] > 0$;

3) по крайней мере с одной стороны от поверхности раздела в пределах некоторой толщины $\left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)_p > 0$, и при этом в каждом из слоев $\left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)_p = 0$ только там, где жидкость физически однородна, а в остальных частях слоев $\left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)_p > 0$ (напомним, что равенство $\left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)_p (z, p_\text{к}(z)) = 0$ может выполняться на данной глубине и для жидкости, которая не является физически однородной).

Как уже говорилось ранее, имеются особые (вырожденные) случаи, когда анализ второй вариации не дает ответа на вопрос об устойчивости, например: обе жидкости физически однородны, скачка плотности в нагруженном состоянии нет, а скачок модуля объемного сжатия есть. Реализация таких случаев даже в лабораторных условиях, не говоря уже о природе, практически невозможна.

В случае неустойчивости (как для сжимаемой идеальной, так и для сжимаемой вязкой жидкости) получены оценки снизу для наибольшего экспоненциального показателя роста ФПУ.

Не менее важным для приложений (в особенности геофизических) является случай, когда один или оба слоя образованы не жидкостями, а твердыми упругими материалами. Тогда в выражении для $R\{\mathbf{v}\}$ (4) появляется дополнительный неотрицательный интеграл от величины $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} : \tilde{\mathbf{L}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$, где $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ – тензор виртуальных скоростей деформаций, а ТР(4) $\tilde{\mathbf{L}}$ – тензор упругих модулей сдвига, выражаемый через полный тензор упругих модулей $\mathbf{L}$ следующим равенством:

$$\tilde{\mathbf{L}} \equiv \mathbf{L} - \frac{\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}}{\mathbf{I} : \mathbf{L}^{-1} : \mathbf{I}} \tag{11}$$

Таким образом, полученные ранее для системы жидкостей необходимые и достаточные условия устойчивости оказываются в случае твердых упругих материалов достаточными, но не необходимыми; это означает, что их нарушение не является достаточным условием неустойчивости. Если только один из слоев твердый, то нарушение условия $\left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)_p \geq 0$ в жидком слое является достаточным условием неустойчивости. Для получения полного набора достаточных условий неустойчивости при наличии твердого слоя или слоев, требуется отдельное исследование, аналогичное проведенному в работе [8]. При этом можно ожидать и аналогичных результатов (т.е. наличия критических значений инверсии плотности и величины $\left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)_p < 0$), что качественно согласуется и с некоторыми из выводов В.А.Дубровского [9].

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №14-05-01556 А

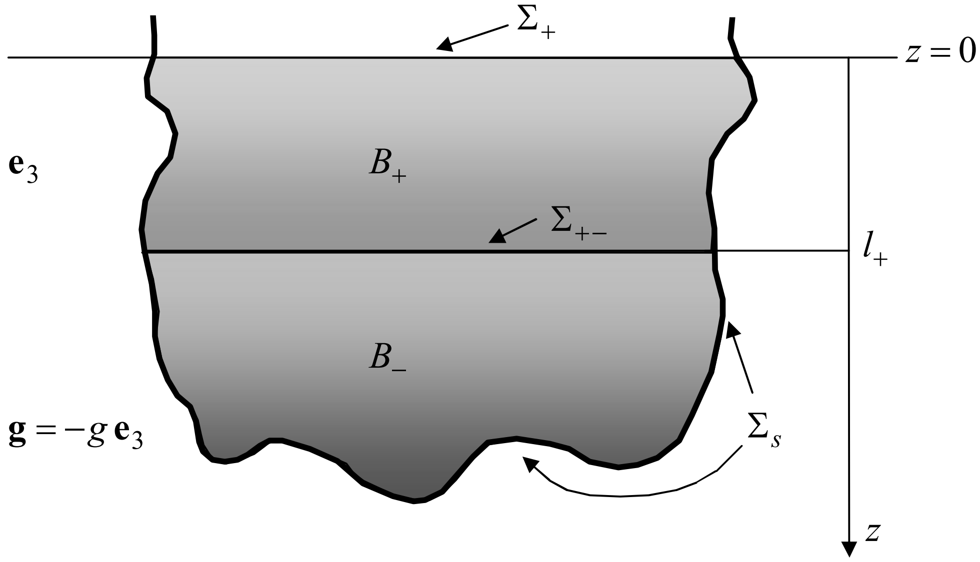

Рис. 1. Изучаемая механическая система

Литература

1. *Rayleigh, Lord*. Investigation of the character of the equilibrium of an incompressible heavy fluid of variable density // Proc. London Math. Soc. 1883. V. 14. P. 170 – 177.
2. *Vandervoort P.O.* The character of the equilibrium of a compressible, inviscid fluid of varying density // Astrophys. J. 1961. V. 134. P. 699 – 717.
3. *Baker L*. Compressible Rayleigh–Taylor instability // Phys. Fluids. 1983. V.26. P. 950-952.
4. *Livescu D.* Compressibility effects on the Rayleigh–Taylor instability growth between immiscible fluids// Phys. Fluids. 2004. V.47. P. 118-127.
5. *Shivamoggi B.K.* Rayleigh–Taylor instability of superposed barotropic fluids // Z. Angew. Math. Phys. 2012. V.63. P. 521-527.
6. *Трусделл К*. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
7. *Рыжак Е.И.* Бескоординатное тензорное исчисление для механики сплошных сред. М.: МФТИ, 2011. 170 с.
8. *Рыжак Е.И., Никитин Л.В.* Об устойчивости и собственных колебаниях системы «плита-жидкость» с инверсией плотности. // Физика Земли. 2005. №5. С. 65 – 75.
9. *Дубровский В.А.* Тектонические волны // Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли. 1985. №1. С.29 – 34.