

Перегрузка связей как метод сравнительной оценки адаптивности сетей

В.В. Чибисов, В.М. Шабунин

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Предметом исследования является адаптивность моделей малого мира. В классических работах для оценки адаптивности используют ряд дополнительных приемов вроде распространяющегося вируса или удаления нескольких узлов сети. В данной работе предложен новый подход, который заключается в моделировании катастроф в сети с помощью логистического ансамбля с перегруженными связями. Рассмотрено два способа количественной оценки адаптивности топологии малого мира. Первый способ связан с прямой оценкой вероятности разрушения динамики при различных значениях перегрузки. Второй способ заключается в качественном анализе достаточно большого числа бифуркационных диаграмм, где управляющим параметром является перегрузка, а бифуркирующей величиной – состояние перегруженного узла. Оба способа позволяют избежать сложностей, связанных с искусственным изменением топологии сети. Полученные результаты не противоречат имеющимся знаниям о сетях малого мира.

Ключевые слова: теория сетей, адаптивность, хаотический ансамбль, логистическая парабола, перегрузка связей, бифуркационная диаграмма, топология малого мира.

Введение и постановка задачи

Одной из наиболее бурно развивающихся научных парадигм является теория сложных сетей [1]. Гибкий математический аппарат теории сетей позволяет находить универсальные паттерны динамики для природных, социальных, финансовых систем [2, 3].

Последние несколько лет в научном дискурсе всё чаще возникает категория адаптивности. Под адаптивностью понимают, как правило, свойство сложной сети активно приспосабливаться в внешним условиям с помощью изменения паттерна связей. Показательно, что понятие адаптивности как правило фигурирует в одном контексте с категорией самоорганизации [4]. Был описан и воплощен в прототипе класс беспроводных сетей, объединяющих в себе свойства адаптивности, самоорганизации и хаотической синхронизации [4, 5].

Активные беспроводные сети оказались эффективным инструментом для более детального и наглядного моделирования систем с хаотической динамикой [6-8]. В этой связи логично предположить, что зеркальное заимствование тоже могло бы быть эффективным. Например, использовать ансамбль связанных логистических отображений для количественной оценки адаптивности целого класса сетевых топологий.

В качестве пробной сетевой топологии мы выбрали модель малого мира [9-11], так как она изначально позиционировалась как сеть с повышенной устойчивостью к различным катастрофам вроде распространения вируса или спонтанного разрушения узлов. Следовательно, имеется возможность сравнить полученные здесь результаты с уже известными.

В статье приведены два независимых метода оценки адаптивности топологии малого мира. Первый метод связан с проверкой финитности достаточно большого числа случайно сгенерированных ансамблей. Второй метод подразумевает построение семейств бифуркационных диаграмм и их сравнительного анализа.

Новизна методов заключается в том, что в ходе каждого эксперимента топология сети не изменяется качественно. То есть не добавляются и не разрушаются связи, не изменяется парциальная динамика элементов, не используются посторонние модельные объекты типа «вирус» и т.д. Вместо этого производится так называемая перегрузка связей [12] единичного элемента сети. При перегрузке нулевые элементы матрицы связей остаются нулевыми, сохраняется построчная нормировка.

Таким образом, задача сводится к оценке адаптивности топологии мира с помощью анализа динамики логистического ансамбля с перегруженными связями.

Модель

Модель сети малого мира представляет собой ансамбль связанных логистических отображений. Число элементов в ансамбле N .

Динамика ансамбля описывается N -мерным отображением вида

$$X_{n+1} = f(AX_n).$$

Где A – матрица связей, $f(x)$ – логистическая вектор-функция.

Матрица связей формируется по стандартному алгоритму Вотса – Стратца для моделей малого мира [9]. Имеется кольцо элементов, каждый изначально связан с K ближайшими соседями с каждой стороны. Затем, двигаясь по кольцу по часовой стрелке, для каждого элемента с вероятностью P_s обрывают связь с его соседом порядка $k=1$ и соединяют со случайно выбранным элементом. Ограничение: нельзя связывать элемент с самим с собой или дублировать уже имеющуюся связь с любым другим элементом. Обход повторяют для $k=1, 2, \dots, K$. После каждого переключения связей учитывается их симметричный характер, то есть $A^T = A$.

Плавное изменение вероятности P_s переключения связей от 0 до 1 соответствует переходу от регулярной кольцевой топологии к полностью случайной топологии Эрдоша – Реньи. Собственно топологией малого мира считается сеть со значением $P_s \sim 0.7 \pm 0.1$.

После этого выполняется перенормировка связей. Всем диагональным элементам присваивается значение a . Недиagonальные ненулевые элементы равны между собой в каждой строке и удовлетворяют условию

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} = 1.$$

Вектор-функция $f(x)$ такова, что $f^i(X) = 4p^i X^i(1 - X^i)$. Верхний индекс означает номер компоненты соответствующего вектора. Значение в столбце параметров p^i равномерно случайно распределены на отрезке $[3/4, 1]$.

Таким образом, сеть представляет собой ансамбль из большого числа неодинаковых логистических отображений (со случайно выбранным параметром), с топологией малого мира. При этом для каждого элемента суммарный вес чуждого сигнала не зависит от числа связанных с ним элементов.

Что касается перегрузки, то по аналогии с [12] перегрузка первого узла заключается в том, что сила самовоздействия первого элемента становится равной $A_{11} = -L$. Нулевые элементы первой строки не изменяются. Ненулевые элементы равны между собой и удовлетворяют условию $\sum_{j=1}^N A_{1j} = 1$. Остальные строки матрицы связи не изменяются. Во всех экспериментах перегружается только первый элемент. Это не ограничивает общности результатов, так как каждый раз столбец парциальных параметров, начальные свойства и связи задаются случайно.

Первый способ. Вероятность финитной динамики

Так как сети малого мира представляют собой не отдельную топологию, а однопараметрическое семейство топологий, используем вероятность переключения связей P_s в качестве основного изменяемого управляющего параметра. Остальные параметры K, N, a – зафиксироваем таким образом, что $a \sim 1, N \gg K \gg 1$.

Для различных P_s выполним следующую серию численных экспериментов. Последовательность действий: 1. Создадим ансамбль по описанному выше алгоритму. 2. Выберем начальные условия случайным образом на единичном N -мерном кубе. 3. Перегрузим первый элемент ансамбля с силой L . 4. Выполним достаточно большое число итераций (порядка примерно $3N$). 5. Успехом эксперимента назовем тот факт, что траектория не ушла на бесконечность. 6. Повторим пункты 1-5 для достаточно большого числа разных ансамблей с разными случайными начальными условиями. 7. Подсчитаем вероятность успеха w . 8. Построим график $w(L)$.

Оказалось, что во всех сериях с различными P_s на графике $w(L)$ имеется линейный участок (рис. 1). Определим угловой коэффициент наклона $m = \left| \text{lin}\left(\frac{dw}{dL}\right) \right|$ линейной части графика при различных P_s . Чем больше m , тем сильнее рост перегрузки влияет на сеть и тем класс топологий менее адаптивен.

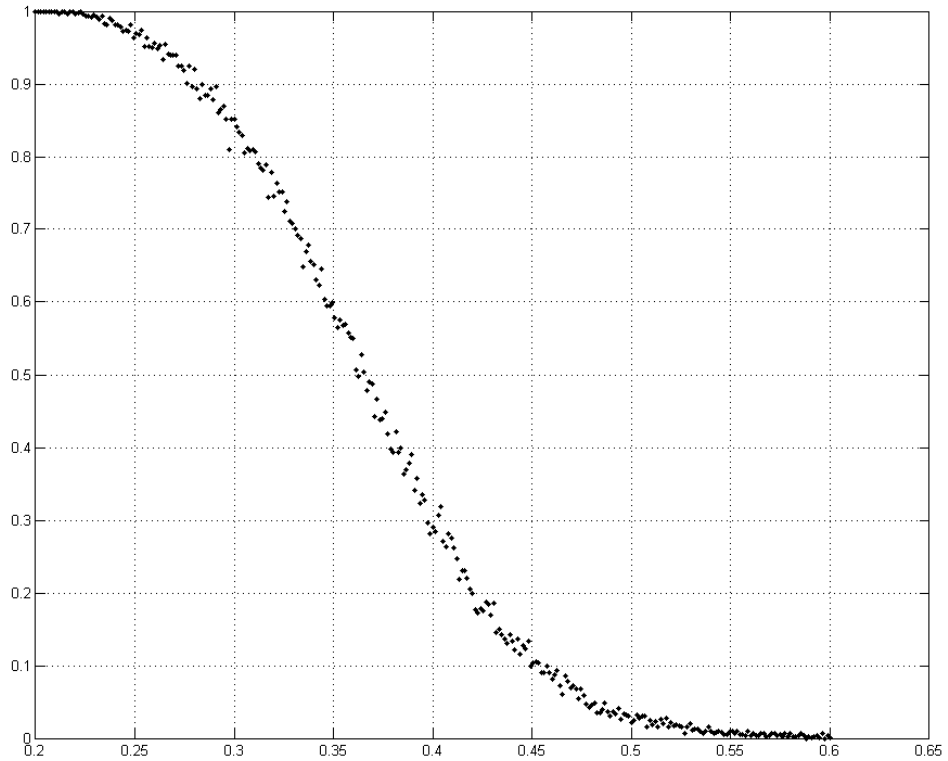


Рисунок 1

Рассмотрим полученную зависимость $m(P_s)$ (рис. 2). На графике видна область минимума $0.65 < P_s < 0.775$, в которой коэффициент постоянный (с точностью 10%). Тем не менее, слева от этой области наблюдается рост m . Это связано с тем, что при относительно регулярной топологии отклонение числа связей от среднего мало и эффект от перегрузки распределяется относительно равномерно.

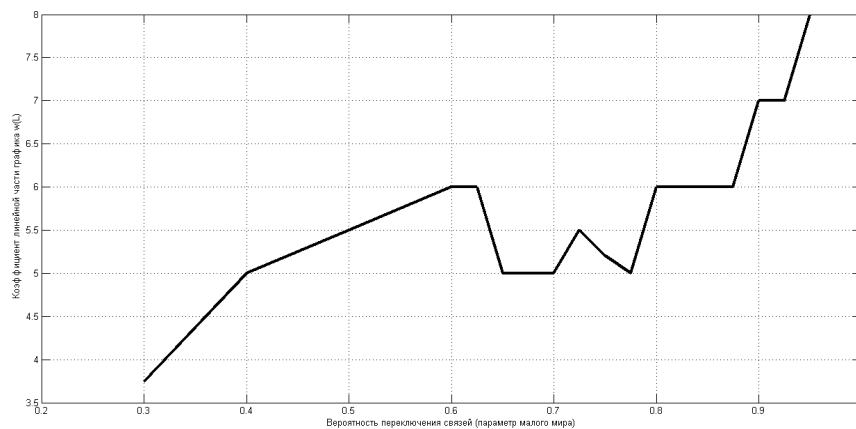


Рисунок 2

Следуя этой логике, m должен монотонно увеличиваться. Однако этого не происходит: на графике имеет область постоянного значения m . Значит, в области $P_s \sim 0.6 \dots 0.8$ сеть обладает

потенциалом для противодействия перегрузке. Или, иными словами, обладает повышенной адаптивностью.

Угловой коэффициент характеризует запас прочности не конкретной сети, а её топологии в целом относительно так называемой перегрузки. Чем больше угловой коэффициент, тем меньше «запас прочности», адаптивность системы. Учитывая, что топологией малого мира считают те сети, для которых $P_s \sim 0.6 \dots 0.8$, то наши результаты не противоречат известным.

Второй способ. Бифуркации перегруженного узла

Зафиксируем параметры K, N, a таким образом, что $a \sim 1, N \gg K \gg 1$. Создадим сеть малого мира с вероятностью переключения связей P_s . Выберем начальные условия случайным образом на единичном N -мерном кубе. Выполним порядка $3N$ итераций, чтобы отсеять переходные процессы. Обозначим значение первого элемента после окончания переходных процессов X_{lim}^1 . Затем, не меняя состояния ансамбля и не изменяя топологию, будем через каждые $3N$ итераций постепенно перегружать первый элемент, чтобы получить бифуркационную диаграмму вида $X_{\text{lim}}^1 = \text{bif}(L)$. Перегрузка увеличивается вплоть до значения L_c , при котором разрушается финитная динамика ансамбля.

Для $P_s = 0.1, 0.2, \dots, 0.9$ построили семейства из 50 бифуркационных диаграмм. Для каждой диаграммы матрица связей, начальные условия и вектор парциальных параметров генерировались заново.

Проанализируем связь между значением P_s , распределением L_c в каждом семействе и разнообразием видов диаграмм.

Во всех семействах существенную долю (примерно половину) составляют диаграммы, где X_{lim}^1 равномерно заполняет некоторый отрезок в пределах единичного интервала. Это ожидаемо, так как парциальный параметр равномерно распределен на отрезке $[3/4, 1]$. Еще примерно четверть случаев составляют диаграммы, образованные одной или несколькими полосами переменной ширины. Притом диаграммы с тремя полосами (рис. 3) имеют место только при $P_s \geq 0.6$.

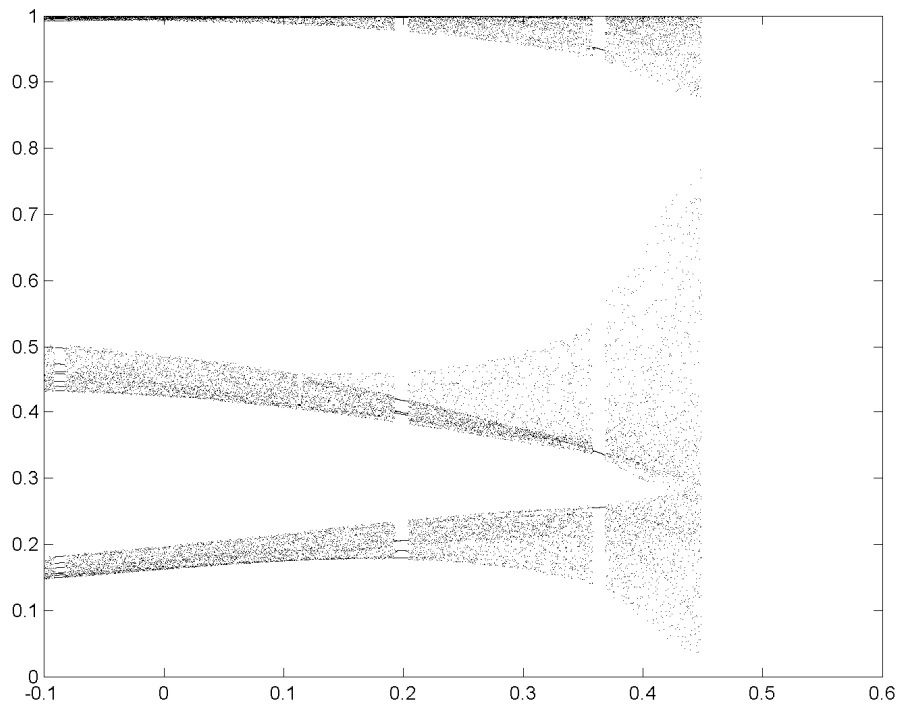


Рисунок 3

Особый интерес представляют диаграммы, состоящие из одной или нескольких гладких ветвей (рис. 4). У них L_c почти всегда близко к своему максимуму по семейству. У стандартных (шумоподобных) диаграмм, напротив, наименьшее значение L_c . Кроме того, во всех семействах имеет место соотношение $\max L_c \sim 3 \min L_c$.

Также в каждом семействе существует значение перегрузки $L_0 \sim 2 \min L_c$ такое, что преодолеть его может только некоторая доля диаграмм с конечным числом гладких ветвей. Все остальные диаграммы либо вовсе не достигают L_0 , либо при приближении к этой точке резко деформируются и обрываются (то есть $L_c = L_0$). Это наблюдение позволяет связать определенную динамику перегруженного элемента с адаптивностью топологии в целом.

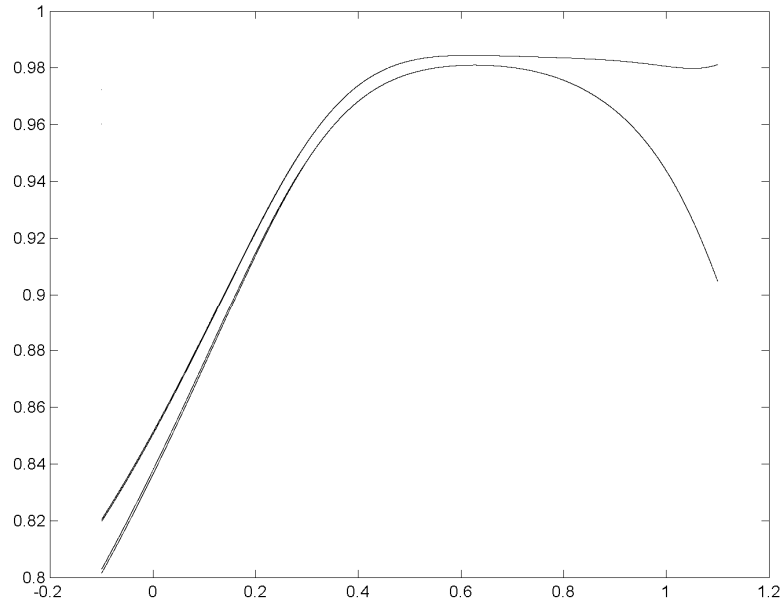


Рисунок 4

Подсчитаем в каждом семействе долю диаграмм, у которых $L_0 < L_c$ и не происходит деформации ветвей при приближении к L_0 . Зависимость этой величины от P_s (рис.5) имеет максимум в точке 0.7.

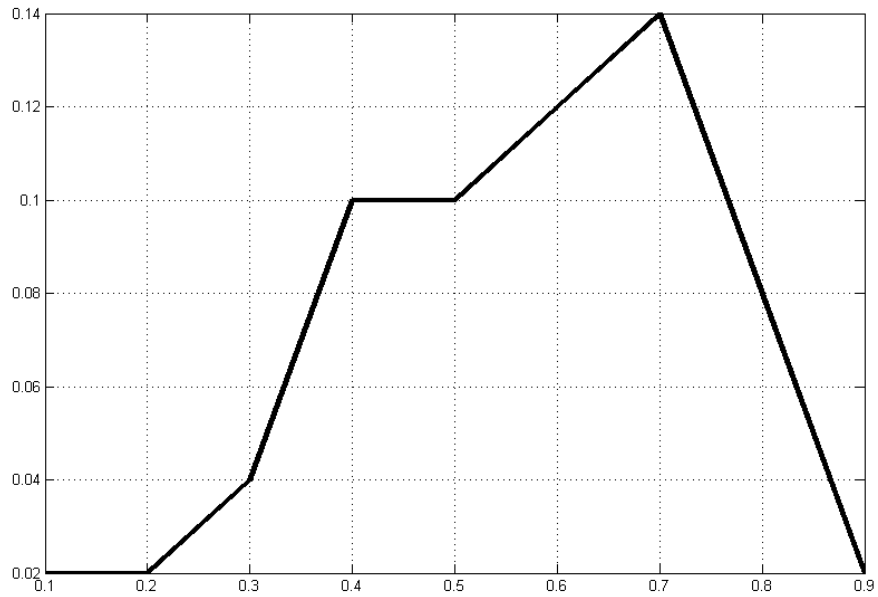


Рисунок 5

Рассуждая аналогично предыдущему разделу, сделаем вывод, что при $P_s \sim 0.7 \pm 0.1$ имеет место реализация динамики на кромке хаоса (цикл периода 3), без дополнительных бифуркаций и с достижением существенно больших перегрузок. Вероятность такого «благоприятного» сценария на порядок выше, чем вне области малого мира. Это означает, что в области $P_s \sim 0.7 \pm 0.1$ сеть обладает дополнительной адаптивностью.

Отдельно отметим тот факт, что в области малого мира $P_s = 0.6 \dots 0.8$ всё многообразие диаграмм сводится к а) шумоподобным, б) состоящим из трех полос (рис. 3), в) состоящим из трех ветвей. Чередование сценариев внутри одной диаграммы (рис. 6) не встречается. Для трех ветвей возможна деформация через каскад бифуркаций при приближении к L_0 или L_c .

Вне области малого мира наблюдаются самые разнообразные сценарии, трудно поддающиеся классификации (рис. 7). Кроме того, вне области малого мира все диаграммы, преодолевшие L_0 , состоят только из одной или двух ветвей.

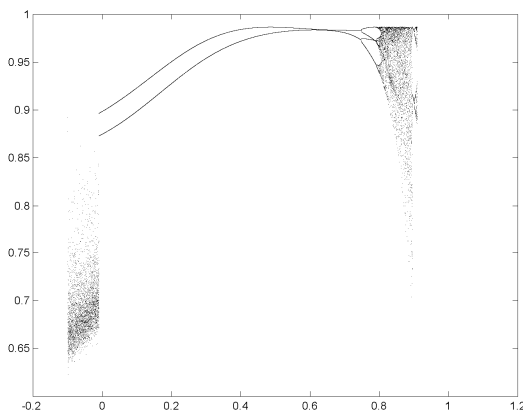


Рисунок 6

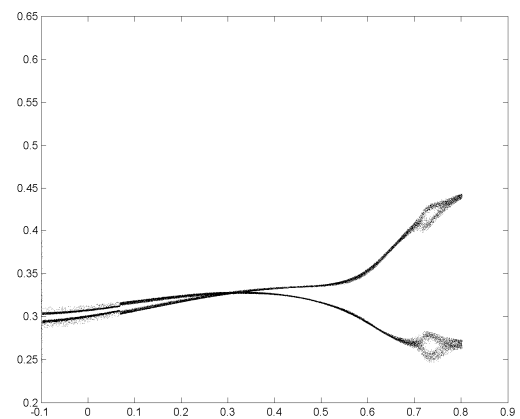


Рисунок 7

Выводы

Предложено два метода оценки адаптивности сетей с топологией малого мира. Оба метода основаны на использовании топологии малого мира в качестве матрицы связи для логистического ансамбля. Разрушение узлов сети и другие катастрофы моделируются с помощью так называемой

перегрузки связей. При перегрузке не происходит никакой качественной перестройки матрицы связей, не меняется число элементов и их парциальная динамика. В этом состоит новизна подхода.

Чтобы не ограничивать общность результатов, мы исключили влияние парциальной динамики элементов, выбрав их параметры случайным образом. По тем же причинам начальные условия и матрица связей генерировались в каждом эксперименте заново. Поэтому оценка сопротивляемости последствиям перегрузки относится не столько к логистическому ансамблю, сколько к топологии малого мира в целом.

Оба метода позволяют сделать вывод о том, что сеть с топологией малого мира обладает большей адаптивностью, чем сеть с регулярной кольцевой топологией и случайная сеть Эрдоша – Реньи.

Литература

1. *Евин И.А.* Теория сложных сетей как новая научная парадигма // Сети, когнитивная наука, управление сложностью, Философия и синергетика.
2. *Newman M.* The physics of networks // Physics today, 2008, November, p.33.
3. *Shaikh N. I., Rangaswamy A., Balakrishnan A.* Modeling the diffusion of innovations using small-world networks // 2005, December.
4. *Дмитриев А.С., Уразалиева Д.М.* Адаптивность, самоорганизация и сложность в сверхширокополостных беспроводных сенсорных сетях // Успехи современной радиоэлектроники, 2013, № 3, с. 7-19.
5. *Дмитриев А.С., Ефремова Е.В., Лазарев В.А., Герасимов М.Ю.* Сверхширокополостная беспроводная самоорганизующаяся прямохаотическая сенсорная сеть // Успехи современной радиоэлектроники, 2013, № 3, с. 19-30.
6. *Dmitriev A.S., Gerasimov M.Y., Emelyanov R.Yu., Andreyev Yu.V.* Modeling Interacting Dynamical Systems with Wireless Active Networks // Proc. 2014 Int. Symp. Nonlinear Theory and its Applications, Luzern, Switzerland, September 14-18, 2014.
7. *Чибисов В.В.* Моделирование нейронных сетей Хопфилда в активных беспроводных сетях // Труды 57-й научн. конф. МФТИ. Секция радиофизики, волновых процессов, радиоэлектронных информационных систем, 29 ноября 2014 г.
8. *Barbarossa S.* Self-organizing sensor networks with information propagation bases on mutual coupling of dynamic systems // Proc. Intl. Workshop on Wireless Ad-Hoc Networks (IWVAN), 2005.
9. *Watts D.J., Strogatz S.H.* Collective dynamics of small-world networks // Nature, 1998, June, V. 393, No. 4, pp. 440-442.
10. *Martel C., Nguyen V.* Analyzing Kleinberg's (and other) small-world models // PODC, 2004, July.
11. *Newman M.E.J., Watts D.J.* Scaling and percolation in the small-world network model // Physical review E, 1999, December, V. 60, No 6.
12. *Чибисов В.В.* Коллективная динамика двух логистических отображений с перегруженной связью // Труды 58-й научн. конф. МФТИ. Секция информационных технологий, 28 ноября 2015 г.

Подписи к рисункам

Рис. 1. Зависимость $w(L)$ при $P_s = 0.725$. Общий вид графика не изменяет при разных P_s . Хорошо различим линейный участок.

Рис. 2. Зависимость $m(P_s)$. В области малого мира коэффициент m постоянный с точностью 10%.

Рис. 3. Типичная для $P_s \geq 0.6$ бифуркационная диаграмма с тремя полосами.

Рис. 4. Бифуркационная диаграмма, состоящая из двух гладких независимых ветвей. Встречается только вне области малого мира. Для данной $P_s = 0.4$.

Рис. 5. Зависимость доли особо устойчивых диаграмм от P_s .

Рис. 6. Пример диаграммы смешанного типа. Встречается только вне области малого мира.

Рис. 7. Пример диаграммы, не поддающейся классификации. Встречается только вне области малого мира.