

## Математическое моделирование течений гранулированных сред сеточно-характеристическим методом

*Т.С. Наркунас<sup>1</sup>, П.С. Уткин<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>Московский физико-технический институт (государственный университет)

<sup>2</sup>Институт автоматизации проектирования РАН

Потоки гранулированных сред широко распространены в природе и в различных промышленных технологических процессах. Примерами могут служить снежные лавины, перемещение, смешивание и просеивание сыпучих материалов, например, зерна, угля, руды и т.д. Моделирование таких потоков необходимо для прогнозирования ситуаций, возникающих, например, при взрывах на угольных шахтах, во внутренней баллистике оружия.

В рамках эйлерова формализма хорошо проработанной математической моделью для описания динамики гранулированных сред является модель [1]:

$$\begin{cases} \frac{\partial(v\rho_s)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(v\rho_s u) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(v\rho_s u) + \frac{\partial}{\partial x}(v\rho_s u^2 + p) = 0, \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u[E + p]) = -\Theta, \end{cases} \quad (1)$$

$$p = (\gamma - 1)v\rho_s \varepsilon [1 + 2(1 + e)G(v)],$$

$$G(v) = v(1 - (v/v_{\max})^{4v_{\max}/3})^{-1}, \quad E = v\rho_s \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2}\right),$$

$$\Theta = \frac{12}{\sqrt{\pi}}(1 - e^2) \frac{\rho T^{3/2}}{\sigma} G(v), \quad T = \varepsilon(\gamma - 1).$$

Здесь  $\rho_s$  – твердотельная плотность частиц,  $v$  – их объемная доля,  $u$  – скорость частиц,  $p$  – давление,  $E$  – полная энергия частиц на единицу объема,  $\varepsilon$  – удельная внутренняя энергия частиц на единицу объема,  $\gamma$  – показатель адиабаты,  $e$  – коэффициент упругого восстановления формы частиц,  $v_{\max}$  – объемная доля плотной упаковки частиц,  $T$  – гранулярная температура,  $\sigma$  – диаметр частиц. Приведенное уравнение состояния обеспечивает наличие предела объемной доли частиц при их компактировании. Член  $\Theta$  отвечает за потери энергии при неупругих столкновениях частиц при  $0 < e < 1$ .

Выписанная система уравнений является гиперболической, и поэтому при ее численном интегрировании возможно использование сеточно-характеристического метода [2]:

$$\frac{\mathbf{U}_j^{k+1} - \mathbf{U}_j^k}{\Delta t^k} + \frac{\mathbf{F}_{j+1/2} - \mathbf{F}_{j-1/2}}{\Delta x} = 0,$$

$$\mathbf{F}_{j+1/2} = 0.5 \cdot (\mathbf{F}_j^k + \mathbf{F}_{j+1}^k) + 0.5 \cdot |\mathbf{J}|_{j+1/2}^k (\mathbf{U}_j^k - \mathbf{U}_{j+1}^k),$$

$$|\mathbf{J}|_{j+1/2}^k = 0.5 \cdot \left[ (\boldsymbol{\Omega}_R | \Lambda | \boldsymbol{\Omega}_L)_j^k + (\boldsymbol{\Omega}_R | \Lambda | \boldsymbol{\Omega}_L)_{j+1}^k \right].$$

Здесь  $j$  – пространственный индекс,  $k$  – временной,  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{F}$  – вектора консервативных переменных и дифференциального потока в дивергентной форме записи определяющей системы уравнений (1),  $\boldsymbol{\Omega}_L$ ,  $\boldsymbol{\Omega}_R$  и  $\Lambda$  – матрицы, которые находятся в результате характеристического анализа системы (1):  $\partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{U} = \boldsymbol{\Omega}_R \Lambda \boldsymbol{\Omega}_L$ .

В условиях отсутствия возможности построения аналитического решения задачи Римана для системы уравнений (1) для тестирования вычислительного алгоритма и его программной реализации были взяты безразмерные параметры тестов из [3]. В [3] исследовался вопрос влияния члена  $\Theta$ . Расчетная область – отрезок  $[0, 10]$ , в центре – разрыв параметров. Параметры слева от разрыва:  $v_L = 0.0232$ ,  $u_L = 0.698$ ,  $p_L = 3.528$ , параметры справа:  $v_R = 0.0261$ ,  $u_R = 0.0$ ,  $p_R = 0.571$ . Таким образом, рассматривается натекание потока частиц на неподвижный массив частиц большей плотности. Диаметр частиц  $\sigma = 0.1$ , показатель адиабаты  $\gamma = 5/3$ , твердотельная плотность частиц  $\rho_s = 1917$ , предельная объемная доля  $v_{\max} = 0.65$ . Время расчета 5.48. Были рассмотрены значения коэффициента упругого восстановления  $e = 1.0, 0.9, 0.7$  и  $0.2$ .

Рис. 1 иллюстрирует результаты расчетов для случаев  $e = 1.0$  и  $e = 0.2$ . В рассматриваемой задаче формируются две ударные волны и контактный разрыв. При  $e = 1.0$  взаимодействие частиц абсолютно упругое,  $\Theta = 0$  (см. рис. 1а). Обратим внимание, что рассчитанные параметры за обеими ударными волнами в отличном соответствии с данными [3]. При этом контактный разрыв «размазывается» гораздо сильнее, чем в [3], поскольку в [3] использовался численный метод, основанный на WENO-реконструкции сеточных функций 5-го порядка аппроксимации. Уменьшение величины коэффициента  $e$  приводит к эффекту кластеризации частиц в окрестности контактного разрыва (см. рис. 1б). Гранулированный газ становится «менее сжимаемым» в терминах коэффициента  $e$ , и гранулярная температура падает. Это падение таково, что гранулярная температура стремится к нулю при приближении объемной доли гранулированного газа к величине плотной упаковки. Рис. 1б наглядно демонстрирует, что величина объемной доли может доходить до значений, близких к плотной упаковке, даже при очень незначительных начальных значениях объемной доли. Рассчитанная амплитуда пика кластеризации на рис. 1б существенно ниже данных из [3] также из-за использования метода первого порядка аппроксимации. Анализ динамики изменения графиков при варьировании  $e$  позволяет также заметить, что при уменьшении  $e$  кластеризация происходит быстрее.

Работа выполнена в рамках гранта Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых (договор № 14.W01.16.6756-МК).

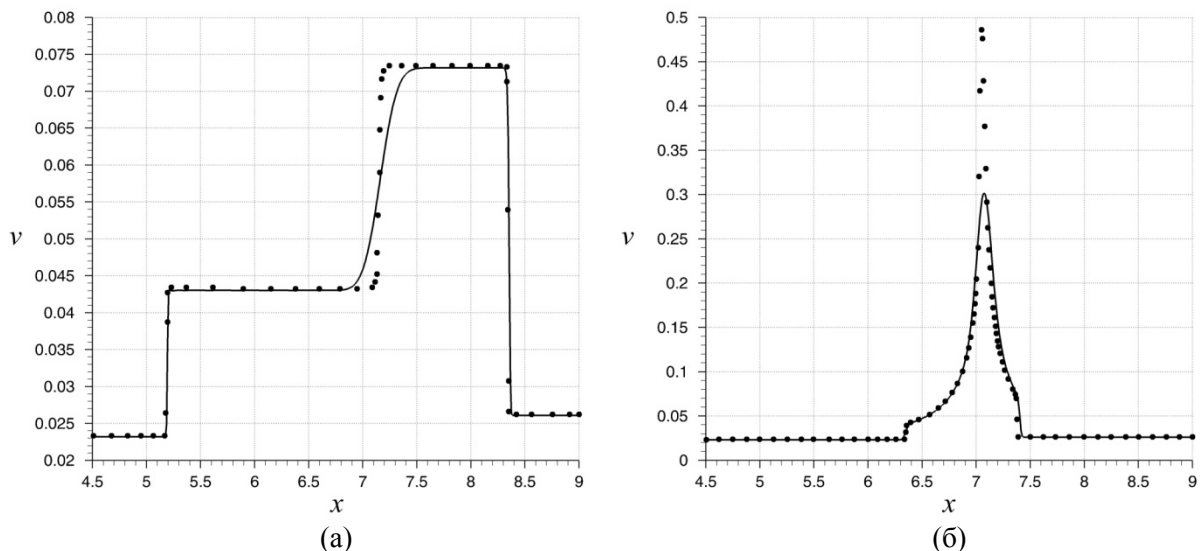


Рис. 1. Результаты решения тестовых задач Римана: (а)  $e = 1.0$ ; (б)  $e = 0.2$ . Сплошная линия – расчет авторов, точки – расчет [3]

### Литература

1. Goldshtein A., Shapiro M. Mechanics of collisional motion of granular materials. Part 1. General hydrodynamic equations // J. Fluid Mech. 1995. V. 282. P. 75.
2. Холодов А.С. О построении разностных схем с положительной аппроксимацией для уравнений гиперболического типа // ЖВМиМФ. 1978. Т. 18, № 6. С. 1476.
3. Serna S., Marquina A. Capturing blast waves in granular flow // Comp. Fluids. 2007. V. 36. P. 1364.