

Моделирование контактного взаимодействия индентора с неоднородным основанием

А. А. Яковенко¹, И. Г. Горячева²

¹Московский физико-технический институт (государственный университет)

²Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН

Решена задача о внедрении с постоянной скоростью индентора в двухслойное основание с учетом релаксационных характеристик слоев. Получены аналитические зависимости нагрузки и радиуса контакта от времени для различных значений скорости вдавливания индентора и выражение для распределения давлений под индентором в разные моменты времени.

Рассмотрено внедрение с постоянной скоростью жесткого индентора в двухслойное основание: упругий слой на вязкоупругом основании. Входные параметры - скорость внедрения v и характеристики слоев: h_1, h_2 - их толщины, E_1, E_2 - модули Юнга, $\mathcal{G} = \mathcal{G}_i (i = 1, 2)$ - коэффициенты Пуассона упругого и вязкоупругого слоев, и T_ε, T_σ - времена релаксации и ползучести вязкоупругого слоя.

Перемещения по нормали к границе двухслойного основания $u_z(r, t)$ являются суммой перемещений первого (верхнего, $i = 1$) и второго (нижнего, $i = 2$) слоев. Из условия контакта индентора с двухслойным основанием следует:

$$u_z(r, t) = u_{z_1} + u_{z_2} = \delta - f(r) = vt - f(r), r \leq a(t), \quad (1)$$

где δ - внедрение индентора в двухслойное основание, а $f(r)$ - форма индентора. При внедрении индентора в форме полусферы $f(r) = r^2 / (2R)$, где R - радиус кривизны индентора.

Примем для верхнего слоя следующее соотношение между перемещениями по нормали к поверхности слоя и действующим на него давлением со стороны индентора $p(r, t)$ [1]:

$$u_{z_1}(r, t) = K_1 p(r, t), \quad (2)$$

$$K_1 = \frac{h_1}{E_1}.$$

В силу одномерности модели верхнего слоя давление, передаваемое на нижний слой, также описывается функцией $p(r, t)$.

Для того чтобы найти u_{z_2} , используем определяющее соотношение для модели Кельвина-Фойгта[2]:

$$p(r, t) + T_\sigma \frac{dp(r, t)}{dt} = K_2 \left(u_{z_2}(r, t) + T_\varepsilon \frac{du_{z_2}(r, t)}{dt} \right), \quad (3)$$

$$K_2 = \frac{E_2}{h_2(1 - \mathcal{G}^2)}.$$

Из (1) и (2) следует

$$u_{z_2}(r, t) = vt - \frac{r^2}{2R} - K_1 p(r, t). \quad (4)$$

Подставляя (3) в (4), получим

$$p(r, t) + T_\sigma \frac{dp(r, t)}{dt} = K_2 \left(vt - \frac{r^2}{2R} - K_1 p(r, t) + T_\varepsilon v - K_1 T_\varepsilon \frac{dp(r, t)}{dt} \right). \quad (5)$$

Граница области контакта $a(t)$ находится из условия равенства нулю перемещений и давлений на ней, то есть

$$u_z(a(t), t) = 0, a(0) = 0, \quad (6)$$

$$p(a(t), t) = 0. \quad (7)$$

Из условий (4) и (6) можно определить границу области контакта

$$a(t) = \sqrt{2Rvt}. \quad (8)$$

Для произвольной точки поверхности вязкоупругого слоя с координатой r начальные условия имеют вид

$$p(r, \tau_0) = 0, \quad (9)$$

$$\text{где } \tau_0(r) = \frac{r^2}{2Rv}.$$

Окончательно, уравнение (5) запишется как

$$(T_\sigma + K_1 K_2 T_\varepsilon) \frac{dp(r, t)}{dt} + (1 + K_1 K_2) p(r, t) = K_2 \left(vt - \frac{r^2}{2R} + T_\varepsilon v \right).$$

Его решение имеет вид

$$p(r, t) = \frac{K_2}{1 + K_1 K_2} \left(v \left(t + \left(e^{\frac{1 + K_1 K_2}{T_\sigma + K_1 K_2 T_\varepsilon} \left(\frac{r^2}{2Rv} - t \right)} - 1 \right) \left(\frac{T_\sigma + K_1 K_2 T_\varepsilon}{1 + K_1 K_2} - T_\varepsilon \right) \right) - \frac{r^2}{2R} \right).$$

Введем безразмерные параметры и функции

$$T = \frac{T_\sigma}{T_\varepsilon}, H = \frac{h_1}{h_2}, E = \frac{E_1}{E_2}, \tilde{p}(r, t) = \frac{p(r, t)}{E_2}, \tilde{t} = \frac{t}{T_\varepsilon}, \tilde{r}^2 = \frac{r^2}{Rh_2}, \tilde{v} = \frac{vT_\varepsilon}{h_2}.$$

В безразмерном виде решение уравнения (5) примет вид

$$\tilde{p}(\tilde{r}, \tilde{t}) = \frac{1}{\frac{H}{E} + (1 - \mathcal{G}^2)} \left(\tilde{v} \left(\tilde{t} + \left(e^{B \left(\frac{\tilde{r}^2 - \tilde{t}}{2\tilde{v}} \right)} - 1 \right) \left(\frac{1}{B} - 1 \right) \right) - \frac{\tilde{r}^2}{2} \right), \quad (10)$$

где

$$B = \frac{H + (1 - \mathcal{G}^2)E}{H + (1 - \mathcal{G}^2)TE}.$$

Зависимость радиуса области контакта $a(t)$ – уравнение (8), в безразмерном виде

$$\tilde{a}(\tilde{t}) = \frac{a(t)}{\sqrt{Rh_2}} = \frac{\sqrt{2Rvt}}{\sqrt{Rh_2}} = \frac{\sqrt{2Rh_2 \tilde{v} \tilde{t}}}{\sqrt{Rh_2}} = \sqrt{2\tilde{v} \tilde{t}}. \quad (11)$$

Зависимость от времени нагрузки $P(t)$ находим, интегрируя функцию давления $p(t)$ по всей области контакта,

$$P(t) = 2\pi \int_0^{a(t)} r p(r, t) dr.$$

В безразмерном виде

$$\tilde{P}(\tilde{t}) = \frac{P(t)}{E_2 Rh_2} = 2\pi \int_0^{\tilde{a}(\tilde{t})} \tilde{r} \tilde{p}(\tilde{r}, \tilde{t}) d\tilde{r} = \frac{\pi \tilde{v}^2}{\frac{H}{E} + (1 - \mathcal{G}^2)} \left(\tilde{t}^2 + 2 \left(\frac{1}{B} - 1 \right) \left(\frac{1}{B} (1 - e^{-B\tilde{t}}) - \tilde{t} \right) \right). \quad (12)$$

В размерном виде

$$P(t) = \frac{\pi R K_2}{1 + K_1 K_2} v^2 \left(t^2 + \frac{2T_\varepsilon (T_\sigma - T_\varepsilon)}{1 + K_1 K_2} \left(\frac{T_\sigma + K_1 K_2 T_\varepsilon}{1 + K_1 K_2} \left(1 - e^{-\frac{1 + K_1 K_2}{T_\sigma + K_1 K_2 T_\varepsilon} \frac{t}{T_\varepsilon}} \right) - t \right) \right).$$

Представляет интерес анализ зависимости максимального давления в центре области контакта от времени:

$$\tilde{p}(0, \tilde{t}) = \frac{\tilde{v}}{\frac{H}{E} + (1 - g^2)} \left(\tilde{t} + (e^{-B\tilde{t}} - 1) \left(\frac{1}{B} - 1 \right) \right). \quad (13)$$

Построим графики зависимости от времени радиуса области контакта $a(t)$ и нагрузки $P(t)$ для трех скоростей внедрения.

Входные данные:

$$R = 0,015 \text{ м},$$

$$h_2 = 0,01 \text{ м}, E_2 = 10000 \text{ Па},$$

$$h_3 = 0,03 \text{ м}, E_3 = 100000 \text{ Па}, T_\sigma = 0,0000001 \text{ с}, T_\varepsilon = 0,00001 \text{ с},$$

$$v_1 = 0,001 \frac{\text{м}}{\text{с}}, v_2 = 0,005 \frac{\text{м}}{\text{с}}, v_3 = 0,01 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Тогда

$$T = 0,01, H = \frac{1}{3}, E = 0,1, B = 1,2224.$$

Материалы слоев можно принять несжимаемыми, то есть коэффициенты Пуассона для них равны 0,499.

Расчеты проводились с учетом следующих ограничений: внедрение $vt < h_1$ и размер площадки контакта должен быть меньше радиуса кривизны индентора, то есть $a(t) < R$, в

безразмерных величинах $\tilde{a}(\tilde{t}) = \frac{a(t)}{\sqrt{Rh_2}} < \sqrt{\frac{R}{h_2}} \cong 0,7$.

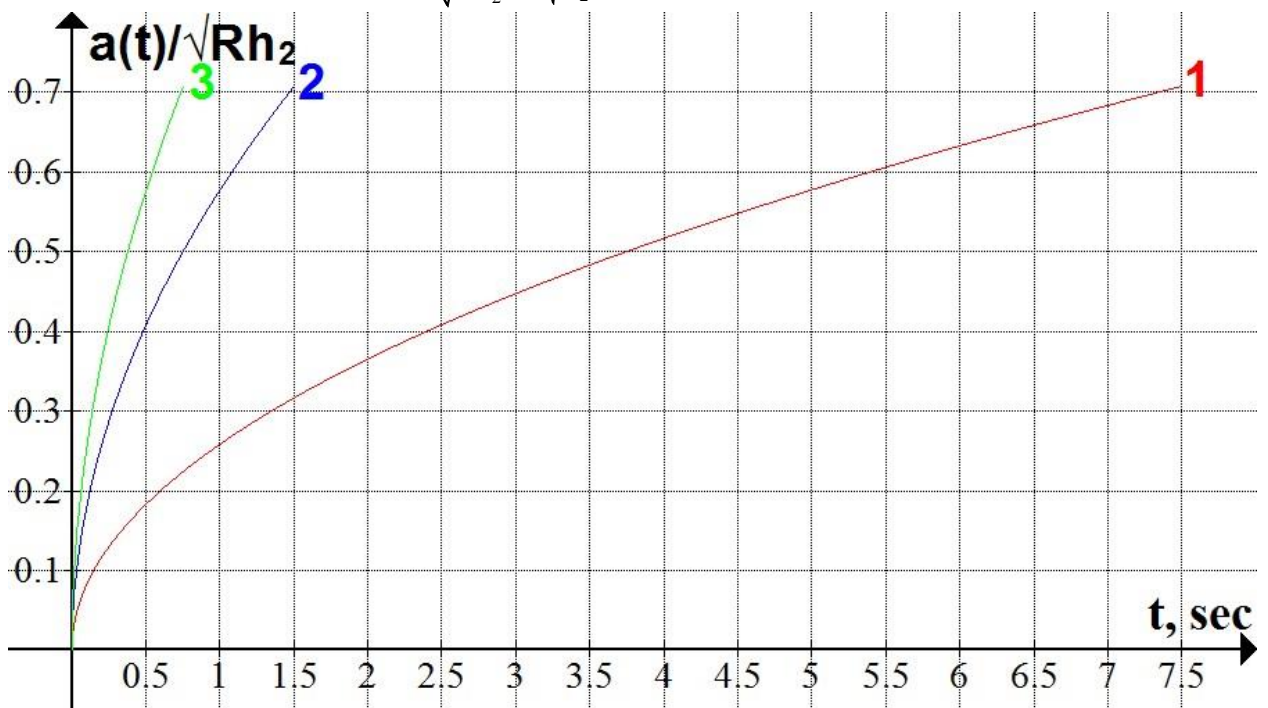


Рис.1 График зависимости радиуса области контакта от времени $\frac{a(t)}{\sqrt{Rh_2}}$ (красная линия – $v_1 = 0,001 \frac{\text{м}}{\text{с}}$,

синяя линия – $v_2 = 0,005 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, зеленая линия – $v_3 = 0,01 \frac{\text{м}}{\text{с}}$).

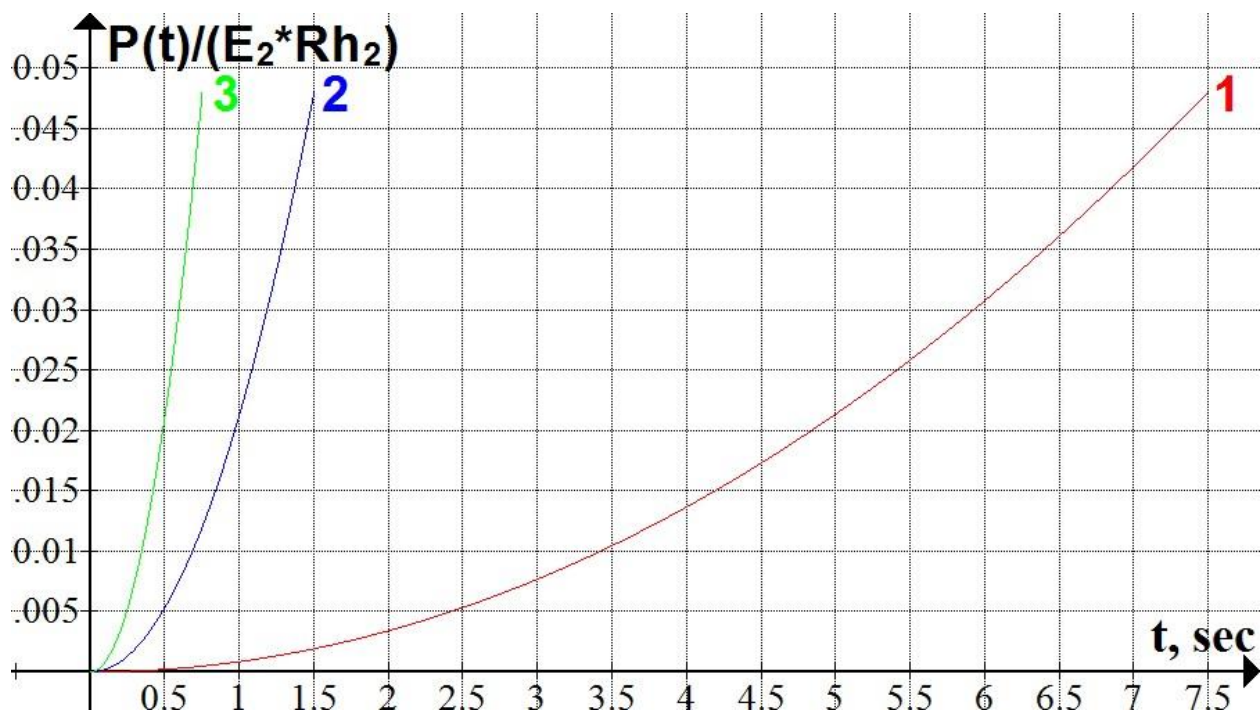


Рис.2 График зависимости величины нагрузки от времени $\frac{P(t)}{E_2 R h_2}$ (красная линия – $v_1 = 0,001 \frac{M}{c}$, синяя

линия – $v_2 = 0,005 \frac{M}{c}$, зеленая линия - $v_3 = 0,01 \frac{M}{c}$).

На рис.3 приведены графики распределения давления под индентором в разные моменты времени при скорости внедрения $v_1 = 0,001 \frac{M}{c}$. Расчеты показывают, что при максимальном внедрении, имеющем место при $t = 7,5c$, максимальная нагрузка равна 2,6Н, радиус области контакта равен 0,015м, а максимальное давление в центре площадки контакта составляет 7,5кПа. Расчеты также показывают, что при выбранной скорости внедрения индентора максимальное давление при $t = 5c$ составляет 5кПа, при этом радиус области контакта равен 0,01225м.

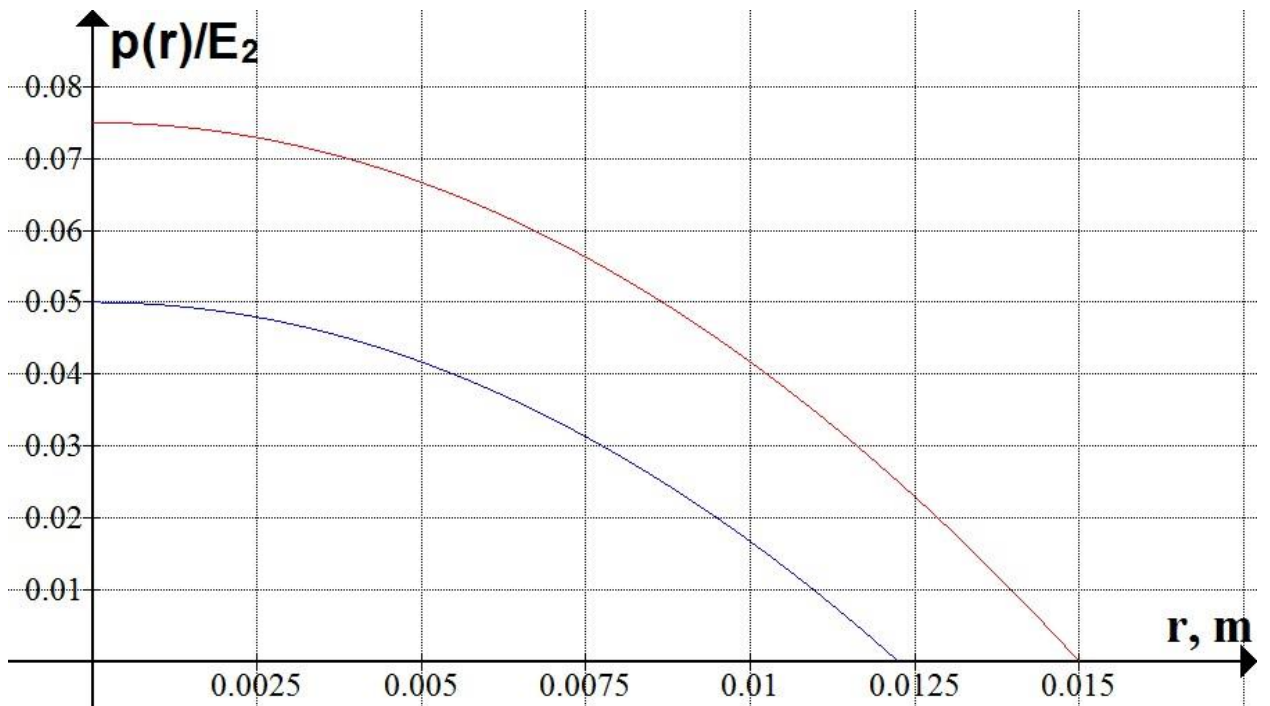


Рис.3 График зависимости давления от радиуса $\tilde{p}(\tilde{r}) = \frac{p(r)}{E_2}$ (красная линия – $t = 7,5c$, синяя линия – $t = 5c$).

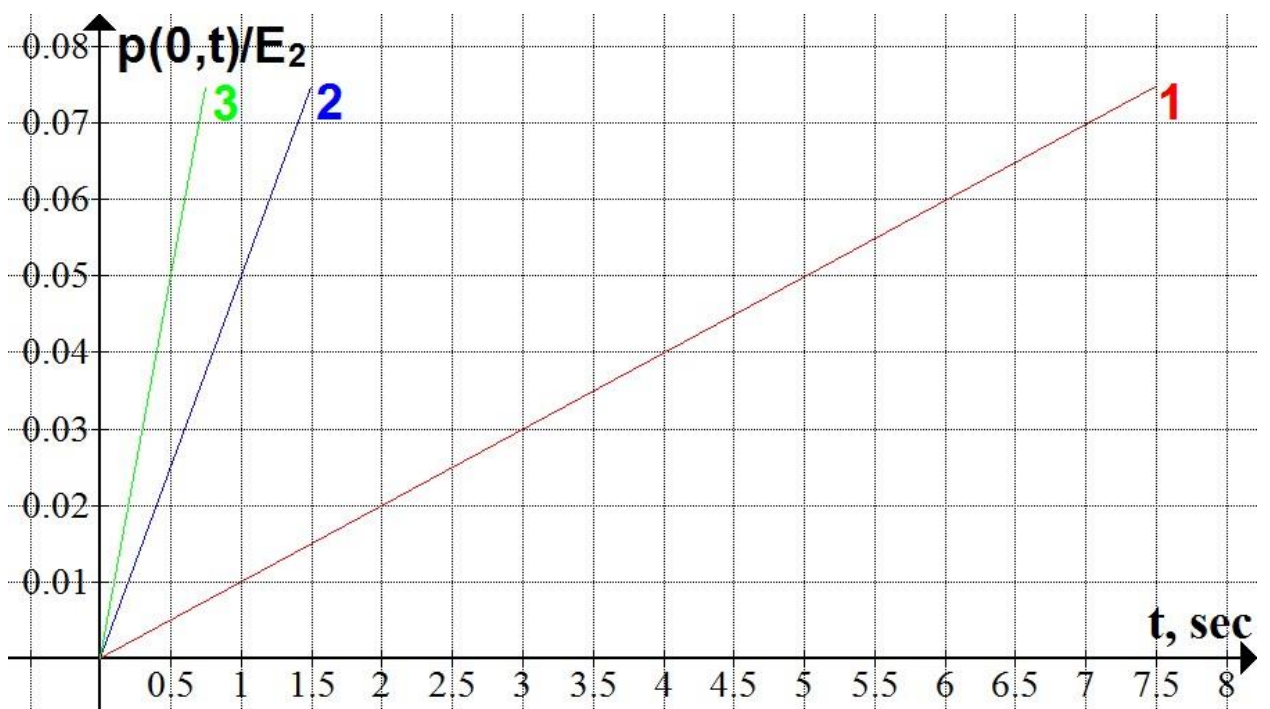


Рис.4 График зависимости максимального давления в центре области контакта от времени

$$\tilde{p}(0, \tilde{t}) = \frac{p(0, t)}{E_2} \quad \left(\text{красная линия} - v_1 = 0,001 \frac{M}{c}, \text{ синяя линия} - v_2 = 0,005 \frac{M}{c}, \text{ зеленая линия} - v_3 = 0,01 \frac{M}{c} \right).$$

На рис.4 приведены графики зависимости максимального давления в центре области контакта от времени, рассчитанные на основании соотношения (13) при разных скоростях нагружения индентора. Максимальное давление прямо пропорционально времени для рассматриваемых временных промежутков.

Заметим, что при малых скоростях внедрения полученные результаты близки к рассчитанным для модели двухслойного упругого основания, для которой, как следует из соотношения (12) при $T = \frac{T_\sigma}{T_\varepsilon} = 1$ (то есть $B=1$), имеем

$$\tilde{P}(\tilde{t}) = \frac{P(t)}{E_2 R h_2} = \frac{\pi \tilde{v}^2 \tilde{t}^2}{\frac{H}{E} + (1 - \varrho^2)} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\tilde{a}(\tilde{t})^2}{\frac{H}{E} + (1 - \varrho^2)}.$$

В данной модели, в отличие от моделей однородного тела, зависимость от времен релаксации и ползучести незначительна.

Особенностью представленной двухслойной модели является учет вязкоупругих свойств одного из слоев, что дает возможность оценить влияние скорости внедрения индентора на величину нагрузки, максимальных контактных давлений и размера области контакта. Результаты моделирования могут быть использованы при обработке экспериментов по индентированию неоднородных (слоистых) материалов, в том числе биологических тканей.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 16-58-52033, 16-58-00085).

Литература

1. Джонсон К.: Механика контактного взаимодействия, перевод с английского – Мир, (1989)
2. Горячева И. Г.: Механика фрикционного взаимодействия, Москва «Наука», (2001)