

УДК 517.977.5

## О задаче оптимального скалярного управления двумя несинхронными осцилляторами\*

*А.А. Галяев<sup>1,2</sup>, П.В. Лысенко<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>Московский физико-технический институт (государственный университет)

<sup>2</sup>Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

### Введение

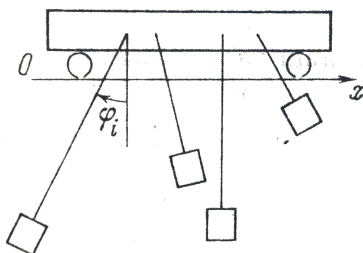
При управлении многомерным объектом часто возникает задача, связанная с единовременной компенсацией и демпфированием различных негативных возмущений, возникающих в разных частях данного объекта. Под возмущением понимается изменение текущих фазовых координат объекта, а задача системы управления состоит в приведении координат к заданным значениям. Если есть возможность представить объект в виде отдельных подсистем, то каждое отдельное возмущение может быть компенсировано действием системы управления таких подсистем. Однако зачастую на практике складывается ситуация, когда единственным скалярным управлением необходимо минимизировать негативные последствия всех возмущений.

Важным примером такой задачи является задача компенсации колебаний, возбужденных в группе осцилляторов, с помощью единого скалярного управления (и обратная ей задача возбуждения колебаний заданной конфигурации). Реальной системой, моделируемой системой осцилляторов, является электросеть, каждый контур которой представляет собой колебательную систему, а управление централизовано и едино для всех контуров. Часто на практике необходимо создать ситуацию, при которой вся энергия системы должна быть сосредоточена в заданном колебательном контуре, т.е. определенной моде колебаний.

---

\*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-08-01285 а).

Простейшей механической моделью исследуемой системы является тележка с двумя закреплёнными на ней маятниками. В качестве скалярного управления здесь служит скорость тележки, а фазовыми переменными являются угол отклонения маятника и его импульс.



Начиная с 1962 года теория оптимального управления бурно развивалась, и, в частности, актуальные задачи управления как одиночным осциллятором, так и группой осцилляторов привлекали внимание исследователей по причине простоты постановок и сложности получаемых решений.

Задача синтеза задачи быстрогодействия для гармонического осциллятора рассмотрена и решена в [1]. В [2] исследован случай воздействия ограниченного одностороннего управления и решена задача оптимального управления осциллятором с целью его полной остановки по двум критериям качества: по критерию минимального времени и критерию минимума импульса, переданного системе управляющим устройством.

Задача управления несколькими осцилляторами впервые описана академиком РАН Черноусько Ф. Л. в [3], где доказана управляемость системы, состоящей из  $n$  осцилляторов и приведено аналитическое решение для задачи симметричного разгона двух маятников, что является частным случаем задачи, исследуемой в данной работе.

Более глубокий анализ этой задачи с примерами численных оптимальных решений для трёх осцилляторов предлагается в [4].

Вообще говоря, помимо критерия быстрогодействия, в зависимости от существа решаемой задачи управления могут быть выбраны и другие критерии оптимизации. Наиболее используемыми в силу физической интерпретации критериями являются

$$J_k = \int_0^T |u(t)|^k dt, \quad k = 0, 1, 2.$$

Критерий  $J_0$  отвечает минимуму по времени,  $J_1$  - минимуму переданного системе импульса, а  $J_2$  - минимуму переданной системе энергии. В данной работе исследована только задача быстрогодействия ( $k = 0$  и  $J_0 = T$ ).

Цель работы состоит в рассмотрении произвольных, не только симметричных краевых условий для фазовых переменных системы, расширении класса ограничений, наложенных на управление, разработка алгоритма для решения задачи.

## Постановка задачи оптимального управления системой двух несинхронных осцилляторов

Многомерный объект ассоциируется с группой независимых осцилляторов с собственными частотами колебаний равными  $\omega_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . В каждый из осцилляторов введено управляющее воздействие  $u$ , ограниченное по модулю  $|u| \leq \epsilon$ . В данной работе исследован случай двух осцилляторов  $N = 2$ . Уравнения динамики системы осцилляторов будут иметь вид

$$\begin{cases} \dot{q}_1(t) = p_1(t), \\ \dot{p}_1(t) = -\omega_1^2 q_1(t) + u(t), \\ \dot{q}_2(t) = p_2(t), \\ \dot{p}_2(t) = -\omega_2^2 q_2(t) + u(t), \end{cases} \quad (1)$$

где  $q_i$ ,  $i = 1, 2$  - положение соответствующего маятника, а  $p_i$ ,  $i = 1, 2$  - его импульс.

На управление наложено ограничение

$$\begin{aligned} |u| &\leq \epsilon, \\ u &\in \mathcal{L}_\infty(0, T). \end{aligned} \quad (2)$$

Возмущение будем понимать в смысле изменения состояния осциллятора, полагая что в начальный момент времени  $t = 0$  каждый осциллятор не возбуждён, т.е. находится в нулевом положении, обладая нулевой скоростью движения. Это означает, что начальные условия для уравнений динамики (1) задаются в виде

$$q_i(0) = 0, \quad p_i(0) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (3)$$

Полная энергия системы  $E(t) = \sum_{i=1}^2 \left( \frac{\omega_i^2 q_i(t)^2}{2} + \frac{p_i(t)^2}{2} \right)$  в начальный момент времени равна  $E(0) = 0$ . Целью задачи управления группой

осцилляторов является её перевод в некоторый момент времени  $T$  в состояние с фазовыми координатами

$$\begin{aligned} q_1(T) &= 0, & p_1(T) &= 1, \\ q_2(T) &= 0, & p_2(T) &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где момент времени  $T$  неизвестен.

Задача оптимизации формулируется следующим образом:

Необходимо найти такую тройку  $(q_i^*(t), p_i^*(t), u^*(t))$  при  $i = 1, 2$ , которая доставляет минимум критерию

$$J_0 = T \rightarrow \min_u$$

При наличии ограничений, задаваемых выражениями (2)–(4).

## Решение задачи оптимального управления системой двух несинхронных осцилляторов

### Условия существования оптимального управления

Сначала покажем, что система вида (1) является управляемой. Для этого составим матрицу управляемости  $U$ . Как известно, для системы

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t) \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} x(t) &\in \mathbb{R}^n; & u(t) &\in \mathbb{R}^m \\ \dim[A(\cdot)] &= n \times n; & \dim[B(\cdot)] &= n \times m \end{aligned}$$

матрица управляемости записывается так

$$U = [B | AB | A^2B | \dots | A^{n-1}B] \quad (6)$$

**Теорема 1.1 (критерий управляемости)** Система (5) является полностью управляемой, если ранг матрицы управляемости (6) равен  $n$ :

$$\text{rank } U = n$$

В нашем случае

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -w_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -w_2^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$n = 4, m = 1$$

Подставляя  $A$  и  $B$  в (6), получаем:

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -w_1^2 \\ 1 & 0 & -w_1^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -w_2^2 \\ 1 & 0 & -w_2^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Детерминант матрицы  $U$  равен:

$$\det(U) = (w_1^2 - w_2^2)^2.$$

Отсюда следует, что, поскольку  $\det(U) \neq 0$  при  $w_1 \neq w_2$ , то  $\text{rank } U = 4$ , т.е. критерий управляемости выполняется при  $w_1 \neq w_2$ . Если частоты маятников совпадают ( $w_1 = w_2$ ), то поставленная задача, вообще говоря, не имеет решения. В самом деле, никакое управление  $u(t)$  не может перевести две идентичные системы из одного и того же начального состояния в разные конечные состояния в момент  $t = T$ , также как никакое управление  $u(t)$  не может перевести две идентичные системы из разных начальных состояний в одно и то же конечное состояние в момент  $t = T$  (обратная задача).

Таким образом показано, что любая точка фазового пространства является достижимой при движении по траекториям системы (1).

Число переключений в каждом конкретном случае зависит как от параметров системы, так и от начальных и конечных условий.

## Применение принципа максимума Понтрягина

Для решения задачи применим принцип максимума Понтрягина. Функция  $H$  в рассматриваемом случае имеет вид:

$$H = \psi_1 p_1 - \psi_2 \omega_1^2 q_1 + \psi_2 u + \psi_3 p_2 - \psi_4 \omega_2^2 q_2 + \psi_4 u \quad (8)$$

Далее, для вспомогательных переменных  $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$  получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = \psi_2 \omega_1^2, \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1, \\ \dot{\psi}_3 = \psi_4 \omega_2^2, \\ \dot{\psi}_4 = -\psi_3. \end{cases}$$

Откуда:

$$\begin{aligned}\psi_2(t) &= C_1 \cos(w_1 t) + C_2 \sin(w_1 t), \\ \psi_4(t) &= C_3 \cos(w_2 t) + C_4 \sin(w_2 t),\end{aligned}$$

где  $C_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$  - некоторые константы.

Учитывая (8) и условие  $-\epsilon \leq u \leq \epsilon$

$$u(t) = \epsilon \operatorname{sign}(\psi_2(t) + \psi_4(t))$$

Т.е. оптимальное управление  $u(t)$  является кусочно-непрерывной функцией, принимающей значения  $\pm \epsilon$ . Переключение управления происходит в моменты времени  $t_k$ ,  $k = 1, \dots, M$  такие что

$$\psi_2(t_k) + \psi_4(t_k) = 0$$

или

$$C_1 \cos(w_1 t_k) + C_2 \sin(w_1 t_k) + C_3 \cos(w_2 t_k) + C_4 \sin(w_2 t_k) = 0 \quad (9)$$

Обозначим набор векторов

$$\Omega_k = \begin{pmatrix} \cos(w_1 t_k) \\ \sin(w_1 t_k) \\ \cos(w_2 t_k) \\ \sin(w_2 t_k) \end{pmatrix}$$

Из (9) следует, что вектор  $C$  лежит в ортогональном подпространстве к набору векторов  $\Omega_k$ , т.е.

$$(C, \Omega_k) = 0, \quad k = 1, \dots, M. \quad (10)$$

Запишем решение системы (1) и подставим в него граничные условия (4):

$$\begin{aligned}q_1(T) &= \frac{1}{\omega_1} \int_0^T \sin[\omega_1(T - \tau)]u(\tau)d\tau = 0 \\ p_1(T) = \dot{q}_1(T) &= \int_0^T \cos[\omega_1(T - \tau)]u(\tau)d\tau = 1 \\ q_2(T) &= \frac{1}{\omega_2} \int_0^T \sin[\omega_2(T - \tau)]u(\tau)d\tau = 0 \\ p_2(T) = \dot{q}_2(T) &= \int_0^T \cos[\omega_2(T - \tau)]u(\tau)d\tau = 0\end{aligned} \quad (11)$$

**Замечание 1.1** Далее условимся обозначать переменной  $t$  абсолютное время, а переменной  $\tau$  длительность интервалов постоянства управления.

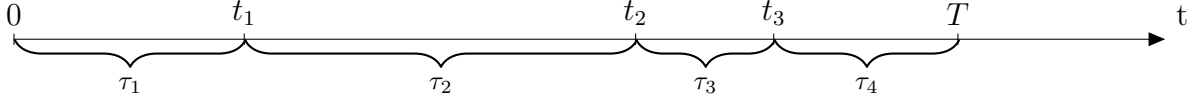


Рис. 1: Связь переменных  $\tau$  и  $t$

Будем искать управление в классе трех переключений (четырёх интервалов постоянства), т.к. только в этом случае число неизвестных в системе (11) равно числу уравнений, и система может быть решена численными методами. Строим управление с четырьмя интервалами постоянства, обозначая из длительности через  $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ . На интервалах длиной  $\tau_1, \tau_3$  имеем  $u = -\epsilon$ , на остальных интервалах  $u = \epsilon$ , причем  $u(0) = -\epsilon, u(T) = \epsilon$ . Подставим  $u(t)$  в соотношения (11):

$$\begin{aligned}
 & \cos(\omega_1(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4)) - 2 \cos(\omega_1(\tau_2 + \tau_3 + \tau_4)) + \\
 & \quad + 2 \cos(\omega_1(\tau_3 + \tau_4)) - 2 \cos(\omega_1\tau_4) = -1 \\
 & \sin(\omega_1(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4)) - 2 \sin(\omega_1(\tau_2 + \tau_3 + \tau_4)) + \\
 & \quad + 2 \sin(\omega_1(\tau_3 + \tau_4)) - 2 \sin(\omega_1\tau_4) = -1/\epsilon \\
 & \cos(\omega_2(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4)) - 2 \cos(\omega_2(\tau_2 + \tau_3 + \tau_4)) + \\
 & \quad + 2 \cos(\omega_2(\tau_3 + \tau_4)) - 2 \cos(\omega_2\tau_4) = -1 \\
 & \sin(\omega_2(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4)) - 2 \sin(\omega_2(\tau_2 + \tau_3 + \tau_4)) + \\
 & \quad + 2 \sin(\omega_2(\tau_3 + \tau_4)) - 2 \sin(\omega_2\tau_4) = 0
 \end{aligned} \tag{12}$$

Решение системы (12) определяет моменты времени переключения управления, посредством которого группа осцилляторов приводится в требуемое положение. Аналогичную систему можно записать и в переменных  $t_1, t_2, t_3, t_4$ . Нахождение аналитического решения представляется затруднительным. Полученная система решалась численно. Вследствие нелинейности система (12) имеет множество корней. Нас интересует  $\inf T$  по всевозможным решениям при фиксированном количестве переключений управления.

## Демонстрация метода. Примеры

### Пример 1

Рассмотрим конкретный пример. Выберем частоты осцилляторов  $\omega_1 = 1, \omega_2 = \sqrt{2}$ , а границу управляющего параметра равной  $\epsilon = 0.25$ . Решение системы (12) в этом случае даёт

$$\begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5787957868 \\ 4.2473265035 \\ 4.1857534167 \\ 0.5104073395 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5787957868 \\ 4.8261222903 \\ 9.0118757070 \\ 9.5222830465 \end{pmatrix}$$

Набор векторов  $\Omega_k, k = 1, \dots, 3$  задаётся матрицей

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0.8371219809 & 0.5470162603 & 0.6832873309 & 0.7301495897 \\ 0.1134882734 & -0.9935393358 & 0.8566878304 & 0.5158352073 \\ -0.9159600965 & 0.4012693627 & 0.9841384204 & 0.1774022811 \end{pmatrix}$$

Используя (10), находим вектор  $C$ :

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.4103711049 \\ -0.0092116545 \\ -0.5584473402 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Теперь построим функцию, определяемую (9):

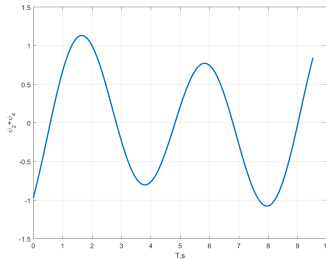


Рис. 1: Функция  $\psi_2 + \psi_4$ , определяющая переключение управления при  $\epsilon = 0.25$

Как мы видим, полученная функция имеет пять точек изменения знака, т.е. оптимальное управление лежит в классе пяти переключений, тогда как мы искали его в классе трёх переключений.

Данный факт свидетельствует о том, что найденное решение будет оптимальным только в данном классе количества переключений. Тогда как решение с пятью переключениями должно привести систему



в требуемое состояние за меньшее время. Найти это решение невозможно без дополнительных уравнений. Подобрать решение с пятью переключениями пока не удалось.

Ниже приведены результаты моделирования, подтверждающие истинность полученного решения. По оси абсцисс здесь и далее на других фазовых портретах отложена координата  $q_i$ , а по оси ординат  $\frac{p_i}{\omega_i}$ ,  $i = 1, 2$ .

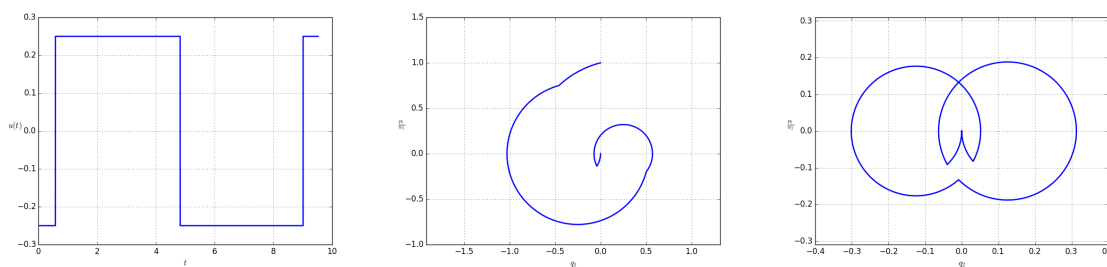


Рис. 2: Управление и фазовые портреты для двух осцилляторов ( $\omega_1 = 1$ ,  $\omega_2 = \sqrt{2}$ ,  $\epsilon = 0.25$ )

Как мы видим, первый осциллятор действительно приходит в положение  $(0,1)$ , а второй - в  $(0,0)$ .

## Пример 2

Прделаем всё то же самое для  $\epsilon = 0.5$  Решение системы (12) в этом случае даёт

$$\begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5346540630 \\ 0.9526060459 \\ 5.3701492483 \\ 0.5832251950 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5346540630 \\ 1.4872601089 \\ 6.8574093572 \\ 7.4406345523 \end{pmatrix}$$

Набор векторов  $\Omega_k, k = 1, \dots, 3$  задаётся матрицей

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0.8604449506 & 0.5095434101 & 0.7275069751 & 0.6861002849 \\ 0.0834390949 & 0.9965128787 & -0.5076948851 & 0.8615369426 \\ 0.8396140382 & 0.5431834558 & -0.9629492824 & -0.2696825529 \end{pmatrix}$$

Используя (10), находим вектор  $C$ :

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4172618122 \\ -1.2023539699 \\ -0.5944679254 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Теперь построим функцию, определяемую (9):

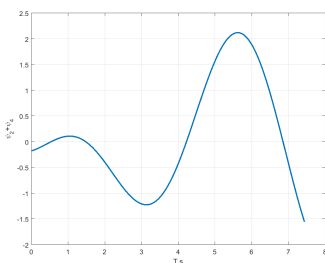


Рис. 3: Функция  $\psi_2 + \psi_4$ , определяющая переключение управления при  $\epsilon = 0.5$

Эта функция имеет уже четыре точки изменения знака. Аналогично моделируем для проверки:

Как мы видим, первый осциллятор действительно приходит в положение  $(0,1)$ , а второй - в  $(0,0)$ .

Найдём такое значение  $\epsilon$ , при котором число нулей функции  $\psi_2 + \psi_4$ , получаемой из ортогонального подпространства векторов  $\Omega_k$ , совпадает с искомым  $M = 3$ . Методом перебора последовательных значений  $\epsilon$  находим, что это условие начинает выполняться примерно с  $\epsilon = 0.6$ .

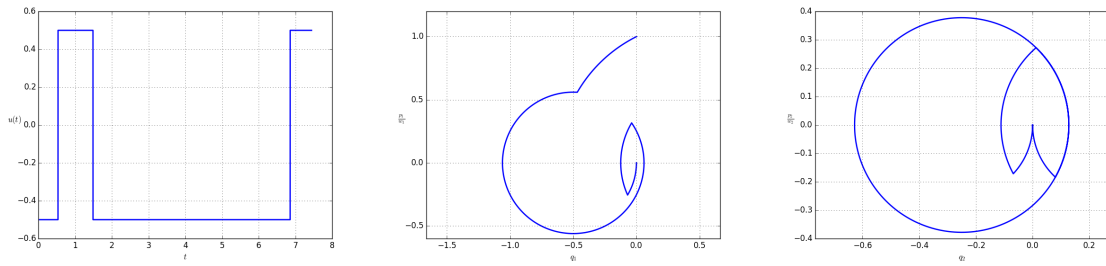


Рис. 4: Управление и фазовые портреты для двух осцилляторов ( $\omega_1 = 1$ ,  $\omega_2 = \sqrt{2}$ ,  $\epsilon = 0.5$ )

Построим зависимость оптимального значения  $T$  от ограничения на управление  $\epsilon$ , которая представляет особенный интерес и показана на рисунке 5. Например, видно, что на отрезке  $\epsilon \in [0.35, 0.6]$  алгоритм находит неоптимальное решение  $T$ , так как оно явно больше аналогичного для меньшего значения  $\epsilon$ . Резкий перепад в районе  $\epsilon = 0.6$  совпадает с характерным переходом к трём нулям функции  $\psi_2 + \psi_4$ .

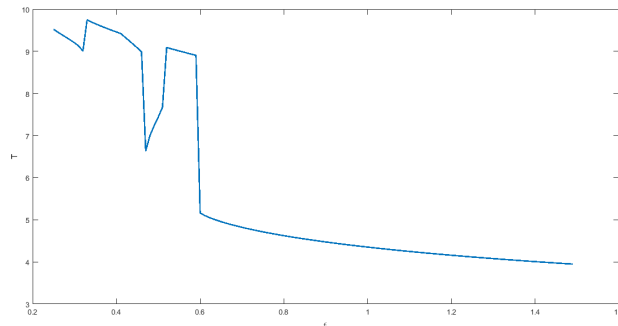


Рис. 5: Зависимость найденного значения оптимального  $T$  от ограничения на управление  $\epsilon$

Построив эту же зависимость для различных значений  $\omega$ , получим граничную частоту  $\epsilon_{\text{гп}}$  в точке скачка количества переключения управления с трех на пять.

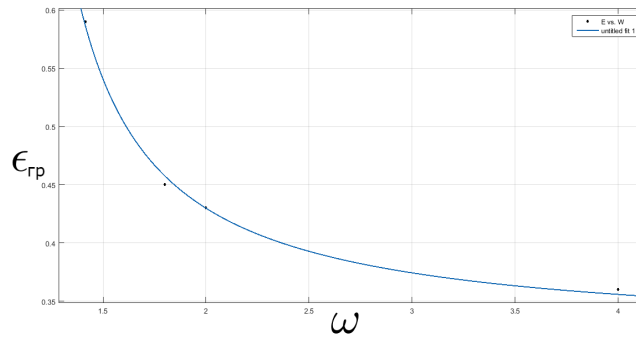


Рис. 6: Зависимость граничного значения  $\epsilon$  в точке скачка количества переключений управления с трех на пять от частоты второго осциллятора

Продемонстрированный метод можно применить для решения задачи с произвольными граничными условиями, в частности симметричными, и односторонним ограничением на управление, рассмотренными в [3].

$$0 \leq u \leq \epsilon.$$

Работоспособность алгоритма демонстрируют следующие графики. При симметрии краевых условий и  $\epsilon = 1$  получаем симметричные решения

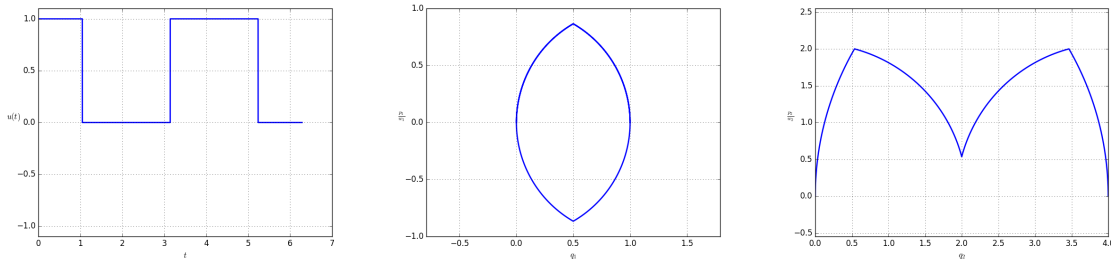


Рис. 7: Вид управления и фазовых портретов при  $\epsilon = 1$

При  $\epsilon \neq 1$  симметрия нарушается.

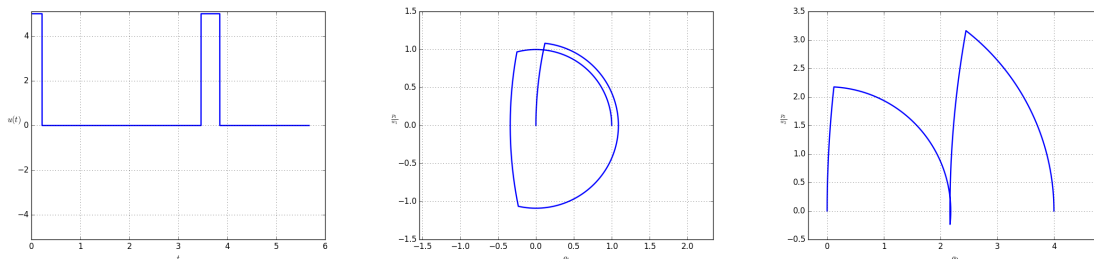


Рис. 8: Вид управления и фазовых портретов при  $\epsilon = 5$

## Заключение

В данной работе были получены следующие результаты:

- Исследована задача быстродействия для ограниченного скалярного управления двумя несинхронными осцилляторами при заданных несимметричных граничных условиях.
- Разработан алгоритм расчета решений и проведено их моделирование. Особенность состоит в универсальности алгоритма, который может быть применим для решения целого спектра подобных задач с разными краевыми условиями и ограничениями на управление.
- Исследована параметрическая зависимость оптимальных решений от границы ограничения, наложенного на управление.

## Список литературы

- [1] *Болтянский В.Г.* Математические методы оптимального управления. М.: Наука. 1969.
- [2] *Галяев А.А.* Задача оптимального управления осциллятором с целью обнуления его энергии при ограничении на управляющее воздействие // *АиТ.* 2009. № 3. С. 24–33.
- [3] *Черноусько Ф.Л.* Управление колебаниями. С. 344-346
- [4] *Галяев А.А.* Скалярное управление группой несинхронных осцилляторов // *АиТ.* 2016. № 9. С. 3–18.