.

УДК 517.955

Явный вид фундаментального решения комплексного параболического оператора.

А.Г.Чечкин, А.С.Шамаев

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

Ноябрь, 2016

Уравнение “второго порядка” параболического типа.

Пусть $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$.

Оператор $\mathfrak{L}$ будем называть оператором “второго порядка”, если он имеет следующий вид:

$$\mathfrak{L}[v] = \frac{1}{2}\sum_{ij} A_{ij}(t)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i \left(\sum_j B_{ij}(t)x_j + c_i(t)\right)\frac{\partial v}{\partial x_i} + \\ + \left(\sum_{ij} F_{ij}(t)x_i x_j + \sum_i g_i(t)x_i + h(t)\right) v.$$

Рассмотрим задачу Коши

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \mathfrak{L}[u], \\ u|_{t=0} = \delta_y(x), \end{array}\right.$$

где $\delta_y(x)$ есть дельта-функция с особенностью в точке $y \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$u(t,x) = \exp\left\{x^T S(t)x + q^T(t)x + r(t)\right\} \times \\ \times C(t)\exp\left\{\left\langle P^{-1}(t)(x - m(t;y)), (x - m(t;y))\right\rangle\right\},$$

где матрица S, вектор q и скаляр r удовлетворяют системе уравнений

$$\left\{\begin{array}{l} S' = 2SAS + SB + B^T S + \frac{1}{2}(F + F^T), \\ q' = (2SA + B^T)q + 2Sc + g, \\ r' = \operatorname{tr}(AS) + \frac{1}{2}q^T A q + q^T c + h, \end{array}\right.$$

с начальными условиями $S_{ij}(0) = q_k(0) = r(0) = 0$ для $\forall i, j, k \in \overline{1, n}$, а матрица P, вектор m и скаляр C удовлетворяют системе уравнений

$$\left\{\begin{array}{l} P' = -P\left(2SA + B^T\right) - (2AS + B)P - 2A, \\ m' = -(2AS + B)m - Aq - c, \\ C' = C \cdot \left(\operatorname{tr}\left(AP^{-1}\right)\right). \end{array}\right.$$

с начальными условиями $P_{ij}(0) = 0$ для $\forall i, j \in \overline{1, n}$, $m(0) = y$, а $C(t)$ есть частное решение вида

$$C(t) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi t)^n \det A_0}}\ \exp\left\{-\frac{n}{2}\int_0^t \frac{\widetilde{q}(s)}{s}ds\right\},$$

где

$$\widetilde{q}(t) = \frac{1}{n}\mathrm{tr}\widetilde{Q},$$

$$\widetilde{Q}(t) = \overline{Q}(t) + (A(t) - A_0)A_0^{-1}[E + \overline{Q}],$$

$$\overline{Q}(t) = [E + Q(t)]^{-1} - E,$$

$$Q(t) = -\frac{1}{2t}R(t)A_0^{-1},$$

$$R(t) = P(t) + 2tA_0.$$

Основное условие: существует несобственный интеграл $\int\limits_0^t \frac{\widetilde{q}(s)}{s}ds < +\infty.$

Список литературы

[1] Ильин А.М., Калашников А.С., Олейник О.А. Линейные уравнения второго порядка параболического типа. УМН. Том. 17. Ном. 3. 1962. стр. 3–146.

“Комплексное уравнение второго порядка” параболического типа.

Пусть $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$.

Оператор $\widehat{\mathfrak{L}}$ будем называть “комплексным оператором второго порядка”, если он имеет следующий вид:

$$\widehat{\mathfrak{L}}[v] = \frac{(-i)^2}{2} \sum_{k,j=1}^{n} A_{kj}(t) \frac{\partial^2 v}{\partial x_k \partial x_j} + (-i) \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} (B_{kj}(t)\, x_j + c_k(t)) \right) \frac{\partial v}{\partial x_k} + \\ + \left(\sum_{k,j=1}^{n} F_{kj}(t)\, x_k x_j + \sum_{k=1}^{n} g_k(t)\, x_i + h(t) \right) v,$$

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} -i\, \hbar \dfrac{\partial u}{\partial t} = \widehat{\mathfrak{L}}[u], \\ u|_{t=0} = \delta_y(x), \end{cases} \tag{1}$$

где $\delta_y(x)$ есть дельта-функция с особенностью в точке $y \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$\exp\left\{ -\frac{x^T S(t) x + q^T(t) x + r(t) + i\psi(t)}{i\hbar} \right\} (C(t) + i\zeta(t)) \cdot \\ \cdot \exp\left\{ -\frac{\left\langle P^{-1}(t)(x - m(t;y)), (x - m(t;y)) \right\rangle}{i\hbar} \right\}, \tag{2}$$

где матрица S, вектор q и скаляры r и ψ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} S' = \dfrac{2}{\hbar^2} SAS + \dfrac{1}{\hbar} \left(SB + B^T S \right) + \dfrac{1}{2} \left(F + F^T \right), \\ q' = \dfrac{1}{\hbar^2} \left(2SA + \hbar B^T \right) q + \dfrac{2}{\hbar} Sc + g, \\ r' = \dfrac{1}{2\hbar^2} q^T A q + \dfrac{1}{\hbar} q^T c + h, \\ \psi' = -\dfrac{1}{\hbar} \mathrm{tr}(AS) \end{cases} \tag{3}$$

с начальными условиями $S_{ij}(0) = q_k(0) = r(0) = \psi(0) = 0$ для $\forall i, j, k \in \overline{1, n}$, а матрица P, вектор m и скаляры C и $\zeta(t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$
\begin{cases}
P' = -\dfrac{1}{\hbar} P \left(\dfrac{2}{\hbar} SA + B^T \right) - \dfrac{1}{\hbar} \left(\dfrac{2}{\hbar} AS + B \right) P - \dfrac{2}{\hbar^2} A, \\
m' = -\dfrac{1}{\hbar} \left(\dfrac{2}{\hbar} AS + B \right) m - \dfrac{1}{\hbar^2} Aq - \dfrac{1}{\hbar} c, \\
C' = C \cdot \dfrac{1}{\hbar^2} \left(\operatorname{tr} \left(AP^{-1} \right) \right), \\
\zeta' = \zeta \cdot \dfrac{1}{\hbar^2} \left(\operatorname{tr} \left(AP^{-1} \right) \right).
\end{cases} \tag{4}
$$

с начальными условиями $P_{ij}(0) = 0$ для $\forall i, j \in \overline{1, n}$, $m(0) = y$, а $C(t)$ и $\zeta(t)$ суть частные решения вида

$$
C(t) = \zeta(t) = \frac{\sqrt{\hbar^n}}{\sqrt{2i(-2i)^n (\pi t)^n \det A_0}} \, \exp \left\{ -\frac{n}{2} \int\limits_0^t \frac{\widetilde{q}(s)}{s} ds \right\}.
$$

где

$$
\widetilde{q}(t) = \frac{1}{n} \operatorname{tr} \widetilde{Q},
$$

$$
\widetilde{Q}(t) = \overline{Q}(t) + (A(t) - A_0) A_0^{-1} [E + \overline{Q}],
$$

$$
\overline{Q}(t) = [E + Q(t)]^{-1} - E,
$$

$$
Q(t) = -\frac{1}{2t} R(t) A_0^{-1},
$$

$$
R(t) = \hbar^2 P(t) + 2t A_0.
$$

Основное условие: существует несобственный интеграл $\displaystyle\int\limits_0^t \frac{\widetilde{q}(s)}{s} ds < +\infty$.

Список литературы

[1] Cordero-Soto R., Lopez R. M., Suazo E., Suslov S. K. Propagator of a Charged Particle with a Spin in Uniform Magnetic and Perpendicular Electric Fields. Lett. Math. Phys. Vol. 84. Num. 2–3. 2008. p. 159–178.

Формула Мелера.

$$\mathcal{L}[v] = -\frac{1}{2}\Delta v + \frac{1}{2}\langle Fx, x\rangle v,$$

$$v(t, x, 0) = \det\left(\frac{F}{\pi\sinh(Ft)}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{F}{\tanh(Ft)}x, x\right)\right\}.$$

Список литературы

[1] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. В четырех томах. М.: Мир, 1977.

Несимметричный перенос с диффузией.

$$\mathcal{L}[v] = a\Delta v - bx_2\frac{\partial v}{\partial x_1},$$

$$v(t,x,y) = \frac{1}{(4\pi at)^{\frac{3}{2}}(1+\frac{1}{12}b^2t^2)^{\frac{1}{2}}}\times$$

$$\times\exp\left\{\frac{(x_1-y_1-\frac{1}{2}bt(x_2+y_2))^2}{4at(1+\frac{1}{12}b^2t^2)} - \frac{(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}{4at}\right\}.$$

Задача о линейно - квадратичном регуляторе.

$$\begin{cases} \mathbf{M}\left(\int\limits_0^T (B(t)\xi,\xi)dt + \alpha\int\limits_0^T(\overline{u},\overline{u}dt)\right) + \mathbf{M}\Phi(\xi(T)) \longrightarrow \min, \\ d\xi = (a(t)\xi + \overline{u})dt + \sigma d\varpi,\ \xi(0) = 0. \end{cases}$$

Уравнение Беллмана и терминальное условие имеют вид

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial V}{\partial t} = \inf\limits_u \left\{ \left((a(t)\overline{x} + \overline{u}\right), \nabla_x V) + \dfrac{1}{2}\sigma^2 \Delta_x V + (B(t)\overline{x},\overline{x}) + \alpha(\overline{u},\overline{u}) \right\}, \\ V(T,x) = \Phi(x). \end{cases}$$

$(u, \frac{\partial V}{\partial x}) + \alpha|u|^2 \to \min \Rightarrow \overline{u}^* = -\frac{1}{2\alpha}\nabla_x V$, следовательно уравнение Беллмана принимает вид

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial V}{\partial t} = \left(\left(a(t)\overline{x} - \dfrac{1}{2\alpha}\nabla_x V\right), \nabla_x V\right) + \dfrac{1}{2}\sigma^2\Delta_x V + (B(t)\overline{x},\overline{x}) + \alpha(\nabla_x V, \nabla_x V), \\ V(T,x) = \Phi(x). \end{cases}$$

Замена $v = \frac{1}{\theta}\ln W$, $\theta = -\frac{1}{2\alpha\sigma^2}$ “линеаризует” уравнение Беллмана, именно

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial W}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\sigma^2\Delta_x W + (a(t)x, \nabla_x W) + (\theta B(t)x, x)W, \\ W(T,x) = \exp(\theta\Phi(x)). \end{cases}$$

Для каждого уравнения можно построить решение в квадратурах с помощью нашего метода. Следовательно,

$$u^* = -\frac{1}{2\alpha}\nabla_x(\frac{1}{\theta}\ln W)$$

есть явное решение нашей задачи при произвольном (не обязательно линейно - квадратичном) терминальном члене.

Список литературы

[1] Черноусько Ф.Л., Колмановский В.Б. Оптимальное управление при случайных возмущениях. М.: Физматлит, 1978.

Задача о фильтрации сигналов.

$$\begin{cases} dx = f(x,t)dt + g(x,t)d\omega,\ x(0) \text{ распределено с плотностью } p_0(x), \\ dy = h(x,t)dt + dW. \end{cases}$$

Нужно оценить x по наблюдаемому изменению y.

Положим
$$\mathcal{L} = f_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2} g_{ik} g_{jk} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Пусть $\rho(t,x)$ — решение уравнения Закая
$$\dot\rho = \left(\mathcal{L}^* - \frac{1}{2}|h(x)|^2\right)\rho + \left\langle h(x), \frac{dy}{dt}\right\rangle \rho(t,x)$$
с начальным условием $\rho(0,x) = p_0(x)$. Если исходные уравнения линейны, то данное уравнение — "второго порядка".

Положим $p(t,x) = \rho(t,x)\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho(t,x)dx\right)^{-1}$. Тогда
$$\mathbf{M}(u(x)|y) = \int p(t,x)u(x)dx$$
есть оценка $u(x(t))$ по наблюдаемой траектории $y(t)$.

В частности, "отфильрованная" траектория $\widehat{x}(t)$ есть
$$\widehat{x}(t) = \int p(t,x)x dx$$

Список литературы

[1] Овсеевич А.И. Фильтр Калмана и квантование. Пробл. передачи информ. Том. 44. Ном. 1. 2008. стр. 59–79.

[2] Øksendal B. Stochastic Differential Equations. An Introduction with Applications. Fifth Edition, Corrected. Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1998.

Задача об управлении инвестиционным портфелем на бесконечном интервале времени.

Модель рыночных активов:

$$\begin{cases} \dfrac{dS_i}{S_i} = f_i(x,t)dt + \displaystyle\sum_{k=1}^{m+n} \sigma_{ik} dW_k, (i=\overline{1,m}), S_i(0) = S_i^0, \\ dx = b(x,t)dt + \Lambda dW, x(0) = x_0, x = (x_1, ..., x_n). \end{cases}$$

$W = (W_1, ..., W_{m+n})$, $h = (h_1, ..., h_m)$ — управление, S_i — цены на активы, x — вектор макроэкономических факторов.

Уравнение капитала портфеля имеет следующий вид

$$dV = \sum_{i=1}^{m} h_i(t) V \left[f_i dt + \sum_{k=1}^{m+n} \sigma_{ik} dW_k \right],\ h_1 + \ldots + h_m = 1$$

Задача управления

$$\mathcal{J}_\theta = \varliminf_{t\to\infty} \left(-\frac{2}{\theta} t^{-1} \ln \mathbf{M} \exp\left\{ -\frac{2}{\theta} \ln V(t) \right\} \right) \to \min,$$

$$\mathcal{J}_\theta \sim \mathbf{M}\rho - \frac{\theta}{4}\mathbf{D}\rho(t,\omega) + \overline{o}(\theta),$$

где ρ — мгновенная процентная ставка $\rho = \frac{\ln V}{t}$, V — капитал портфеля, управление $\overline{h}$ находится из условия минимума

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{2}+1\right) \left\langle h^T \Sigma, \Sigma^T h \right\rangle - \langle h, f(x) \rangle \to \min := K_\theta(x),$$

$$h_1 + ... + h_m = 1,$$

Σ — матрица из элементов σ_{ik}.

Пусть $\widehat{p_x}(t,\xi)$ — решение задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{\widehat{p}}_x = L\widehat{p}_x(t,\xi) + \imath\langle \Lambda H_\theta^T(x)\xi, \nabla_x \widehat{p}_x \rangle + [-\frac{1}{2}|H_\theta^T(\xi)\xi|^2 + \imath\langle L_\theta(x)\xi\rangle]\widehat{p}_x, \\ \widehat{p}_x(0,\xi) = 1. \end{cases}$$

Здесь $H_\theta(x) = h_T(x)\Sigma$, $L_\theta(x) = \langle f, h_\theta \rangle - \frac{1}{2}|H_\theta|^2$, L — оператор Колмогорова для стохастического уравнения $dx = b(x,t)dt + \Lambda dW$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ — вектор параметр.

Тогда
$$p_x(t,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}_\xi} e^{-\imath\xi y} p_x(t,\xi) d\xi.$$

Список литературы

[1] Bielecki T., Pliska S. Risk Sensitive Dynamic Asset Management. J. Appl. Math. and Optimiz. Vol. 37. 1999. p. 337–360.

[2] Камбарбаева Г.С., Розанова О.С. Об эффективном портфеле, зависящем от процентной ставки Кокса-Ингерсолла-Росса. Вестник Моск. унив. Сер 1. Математика. Механика. Ном. 1. 2013. стр. 3–10.

Предельное поведение плотности $p_x(t,y)$ при $t\to\infty$.

$$\frac{1}{\sqrt{t}}p_x\left(t,\frac{y}{\sqrt{t}}-\lambda_0^\Theta\right)\underset{t\to\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{\sqrt{2\pi\bar\lambda_0^\Theta}}\exp\left(-\frac{y^2}{\bar\lambda_0^\Theta}\right)$$

где $(\lambda_0^\Theta,\bar\lambda_0^\Theta)$ — пара чисел, определяемая из условия разрешимости задач

$$L^0v_1^\Theta(x)=L_\Theta(x)+\lambda_0^\Theta,$$

$$L^0\bar v_1^\Theta(x)=-|\Lambda\nabla_x v_1^\Theta(x)|^2+|H_\Theta|^2+\bar\lambda_0^\Theta.$$

Для определения $(\lambda_0^\Theta,\bar\lambda_0^\Theta)$ можно использовать формулы

$$\lambda_0^\Theta=\int\limits_{\mathbb{R}^n}L_\Theta(x)p(x)dx,$$

$$\bar\lambda_0^\Theta=\int\limits_{\mathbb{R}^n}(|\Lambda\nabla_x v_1^\Theta(x)|^2+|H_\Theta|^2)p(x)dx.$$

Здесь $p(x)$ определяется как основное состояние сопряженного оператора

$$L_0^*p(x)=0,\ p(x)>0,\ |p(x)|\to 0,$$

при $|x|\to 0$, $\int\limits_{\mathbb{R}^n}p(x)dx=1$.

Список литературы

[1] Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Теория мартингалов. М.: Наука, 1986.

[2] Pardoux E., Veretennikov A. On the Poisson Equation and Diffusion Approximation 1. Ann. Probab. Vol. 29. Num. 3. 2001. p. 1061–1085.

[3] Pardoux E., Veretennikov A. On the Poisson Equation and Diffusion Approximation 2. Ann. Probab. Vol. 31. Num. 3. 2003. p. 1166–1192.

[4] Pardoux E., Veretennikov A. On the Poisson Equation and Diffusion Approximation 3. Ann. Probab. Vol. 33. Num. 3. 2005. p. 1111–1133.

Плотность распределения падения капитала портфеля.

Плотность распределения падения капитала портфеля, когда управление по Белецкому-Плиске начинается в нулевой момент времени со значения вектора макропараметров x_0 и капитала портфеля V_0, продолжается до момента t_1 и далее на отрезке $[t_1,\, t_1 + \triangle t]$ не изменяется, обозначим через $q(V_0, x_0; V, x, t_1 + \triangle t)$. Для нее имеет место формула

$$q = \int\int p^{h(t)}(V_0, x_0; \widetilde{V}, \widetilde{x}, t) p^{h(t_1)}(\widetilde{V}, \widetilde{x}; V, x, \triangle t) d\widetilde{V} d\widetilde{x}$$

Здесь $p^{h(t)}$ и $p^{h(t_1)}$ — соответствующие плотности распределения величины (V, x) при управлении $h(t) = M\bar{x} + \bar{m}$ на отрезке $[0,\, t_1]$ и $[0,\, \triangle t]$ с постоянной $h(t_1)$. Начальные условия, соответствующие $p^{h(t)}$ и $p^{h(t_1)}$, будут $(V_0,\, x_0)$ и $(\widetilde{V},\, \widetilde{x})$.

Для $p^{h(t)}$ и $p^{h(t_1)}$ нашим методом можно построить выражение в квадратурах, значит и для q можно построить выражение в квадратурах.

Связь с основными состояниями дифференциальных операторов.

Поведение средней процентной ставки.

Пусть L_0^x — оператор Колмогорова для стохастического уравнения, описывающего
динамику макроактивов. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} [L_0^x + K_\Theta(x)]u_\Theta(x) = \rho_\Theta u_0(x),\ x \in \mathbb{R}^n, \\ u_\Theta(x) \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^n,\ u_\Theta(x) \to 0,\ |x| \to \infty. \end{cases}$$

Это задача об "основном состоянии" дифференциального оператора $L_0^x + K_\Theta(x)$.

Утверждение 1.

$$\min_{\bar{h}:h_1+\ldots h_m=1} \mathfrak{T}_\Theta = \rho_\Theta,$$

где $\mathfrak{T}_\Theta$ — функционал в задаче управления активами, удовлетворяющими уравнениям модели Белецкого-Плиски.

В частности, при $\Theta = 0$ ρ_0 — "наилучшее" значение доходности на бесконечном интервале времени $[0, +\infty)$ в случае, когда рискованность портфеля при управлении не учитывается.

Как описать предельное поведение плотности $p_x(t, y)$ при $t \to \infty$?

Ранее были получены предельные теоремы. Установим связь с асимтотикой основных состояний (при $\gamma \to 0$). Рассмотрим задачи

$$\begin{cases} (L_0^x + \gamma \bar{L}_\Theta(x))u_\Theta^\gamma(x) = \gamma\lambda_\gamma^\Theta u_\Theta^\gamma(x),\ x \in \mathbb{R}_x^n, \\ |u_\Theta^\gamma(x)| \to 0,\ |x| \to \infty,\ u_\Theta^\gamma(x) \geq 0,\ x \in \mathbb{R}_x^n, \\ u_\Theta^\gamma(x) = 1 + \gamma v_1^0 + \ldots,\ \lambda_\gamma^\Theta = \lambda_0^\Theta + \gamma\lambda_1^\Theta + \ldots. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (L_0^x + \gamma(-|\Lambda\nabla_x v_1^\Theta(x)|^2 + |H_\Theta(x)|^2))\bar{u}_\Theta^\gamma(x) = \gamma\bar{\lambda}_\gamma^\Theta \bar{u}_\Theta^\gamma(x),\ x \in \mathbb{R}_x^n, \\ |\bar{u}_\Theta^\gamma(x)| \to 0,\ |x| \to \infty,\ \bar{u}_\Theta^\gamma(x) \geq 0,\ x \in \mathbb{R}_x^n, \\ \bar{u}_\Theta^\gamma(x) = 1 + \gamma\bar{v}_1^0 + \ldots,\ \bar{\lambda}_\gamma^\Theta = \bar{\lambda}_0^\Theta + \gamma\bar{\lambda}_1^\Theta + \ldots. \end{cases}$$

Пара $(\lambda_0^\Theta, \bar\lambda_0^\Theta)$ определяет набор чисел, совпадающих с полученными ранее в формуле предельного перехода

$$\frac{1}{\sqrt{t}} p_x\left(t, \frac{y}{\sqrt{t}} - \lambda_0^\Theta\right) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar\lambda_0^\Theta}} \exp\left(-\frac{y^2}{\bar\lambda_0^\Theta}\right)$$

Список литературы

[1] Пятницкий А.Л., Шамаев А.С. Ассимптотическое поведение собственных значений и собственных функций несамосопряженного оператора в $\mathbb{R}^n$. Труды семинара им. И.Г.Петровского. Том. 23. 2003. стр. 287–308.

Хеджирование в рамках модели Белецкого-Плиски.

Аналог уравнения Блэка-Шоулса:

$$\begin{cases} \dot{u} + a_{ij}(t,S)S_iS_j\frac{\partial^2 u}{\partial S_i \partial S_j} + \rho(t)S_i\frac{\partial u}{\partial S_i} = 0, \\ u(T,S) = F(S),\ a_{ij} = (\Sigma\Sigma^T)_{ij}. \end{cases}$$

Если a_{ij} и ρ постоянны (ρ — безрисковая банковская ставка), то страховая цена для m активов находится по формуле

$$V_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int\limits_{\mathbb{R}^{n+m}} e^{-\frac{|\bar{y}|^2}{2T}} F\left(S_1(0)e^{(\rho - \frac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{n+m}\sigma_{1j}^2)T + \sum\limits_{j=1}^{n+m}\sigma_{1j}y_j}, \dots \right.$$

$$\left. \dots, S_m(0)e^{(\rho - \frac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{n+m}\sigma_{mj}^2)T + \sum\limits_{j=1}^{n+m}\sigma_{mj}y_j} \right) dy.$$

Количество активов в репликативном портфеле

$$\Theta_i = e^{\rho(t-T)}\frac{\partial u}{\partial S_i}(t,S),\ i = 1,\dots,m.$$

Замена $y_i = \ln S_i$ переводит уравнение Блэка-Шоулса в систему уравнений “второго порядка”.

Список литературы

[1] Black F., Scholes M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. J. of Polit. Econ. Vol. 81. Num. 3. 1973. p. 637–654.

Достаточные условия минимальности V_0.

А. Σ имеет полный ранг.
Б. Решение задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{\widehat{q}} = L_0^x \widehat{q} + i\xi |x|^2 \widehat{q}, \\ q(0, x, \xi) = 1, \end{cases}$$

удовлетворяет условию

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2\pi} \int e^{-i\eta\xi} \widehat{q}(t, x, \xi) d\xi \right) e^{\eta} d\eta < \infty.$$

Список литературы

[1] Øksendal B. Stochastic Differential Equations. An Introduction with Applications. Fifth Edition, Corrected. Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1998.

Решение уравнения для цены опциона при коэффициентах, зависящих от t.

Пусть S_1, S_2 — цены активов на момент времени t. r — безрисковая ставка. Задача заключается в нахождении цены опциона $P(S_1, S_2, t)$. Введём новые переменные: $x = \ln S_1$, $y = \ln S_2$, $u(S_1, S_2, t) = e^{rt}P(S_1, S_2, t)$. Тогда уравнение для цены опциона записывается в виде:

$$u'_t - \frac{1}{2}(\sigma_1^2(u''_{xx} - u'_x) + \sigma_2^2(u''_{yy} - u'_y) + \frac{4\rho}{1+\rho^2}u''_{xy}) - r(u'_x + u'_y) = 0$$

Теорема.Решение $v(t,x)$ задачи Коши $\frac{\partial v}{\partial t} = L(v)$, $v|_{t=0} = \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — непрерывная ограниченная функция в $\mathbb{R}^n_x$, а $L(v) = \frac{1}{2}\sum\limits_{i,j=1}^{n} A_{ij}(t)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum\limits_{i=1}^{n} c_i(t)\frac{\partial v}{\partial x_i} + h(t)v$, имеет вид

$$v(t,X) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_y} \varphi(y)w(t,x,y)dy,$$

где

$w(t,x,y) = \exp\left\{\int\limits_0^t h(\tau)d\tau\right\} C(t) \exp\left\{P^{-1}\left(x - y - \int\limits_0^t c(\tau)d\tau, x - y - \int\limits_0^t c(\tau)d\tau\right)\right\},$

$P(t) = -2\int\limits_0^t A(\tau)d\tau,$

$C(t) = \frac{\exp\left\{-\frac{n}{2}\int\limits_0^t \frac{q(s)}{s}ds\right\}}{\sqrt{(2\pi t)^n \det A(0)}},$

$q(t) = \frac{1}{n}\mathrm{tr}\bar{Q},$

$$\bar{Q} = \left[E + \frac{1}{2t}\int\limits_0^t (A(\tau) - A(0))d\tau \times A^{-1}(0) - E\right] +$$

$$+(A(t) - A(0))A^{-1}(0)\left[E + \frac{1}{2t}\int\limits_0^t (A(\tau) - A(0))d\tau \times A^{-1}(0)\right]^{-1}.$$

Функции $A_{ij}(t)$, $c_i(t)$, $h(t)$ предполагаются непрерывными и такими, что $\int\limits_0^\delta \frac{q(s)}{s}ds < +\infty$.

Применяя теорему к уравнению на стоимость опциона, получаем

$$P(S_1, S_2, t) = \int P(e^{y_1}, e^{y_2}, 0) u(\ln S_1, \ln S_2, T) dy,$$

где T — время погашения опциона.

Фундаментальное решение одномерного уравнения Шрёдингера в работах С.К.Суслова.

Рассмотрим одномерное уравнение Шрёдингера с квадратичным Гамильтонианом

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -a(t)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + b(t)x^2\psi - i\left(c(t)x\frac{\partial\psi}{\partial x} + d(t)\psi\right),$$

где $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ и $d(t)$ — заданные действительнозначные функции, зависящие от времени t.

Соответствующая функция Грина для данного уравнения может быть найдена следующим образом

$$\psi = G(x,y,t) = A(t)e^{iS(x,y,t)},$$

где $A(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i\mu(t)}}$, $S(x,y,t) = \alpha(t)x^2 + \beta(t)xy + \gamma(t)y^2$, а $\alpha(t)$, $\beta(t)$ и $\gamma(t)$ — дифференцируемые действительнозначные функции, зависящие от времени t и удовлетворяющие следующим уравнениям

$$\begin{cases} \alpha(t) = \frac{1}{4a(t)}\frac{\mu'(t)}{\mu(t)} - \frac{c(t)}{2a(t)}, \\ \beta(t) = -\frac{\lambda(t)}{\mu(t)},\ \lambda(t) = exp\left(\int\limits_0^t (c(s)-d(s))ds\right), \\ \gamma(t) = \frac{a(t)\lambda^2(t)}{\mu(t)\mu'(t)} + \frac{c(0)}{2a(0)} - 4\int\limits_0^t \frac{a(s)\sigma(s)\lambda^2(s)}{(\mu'(s))^2}ds. \end{cases}$$

Функция $\mu(t)$ удовлетворяет характеристическому уравнению

$$\mu'' - \tau(t)\mu' + 4\sigma(t)\mu = 0,$$

где $\tau(t) = \frac{a'}{a} + 2c - 2d$, а $\sigma(t) = ab - cd + \frac{c}{2}\left(\frac{a'}{a} - \frac{c'}{c}\right)$ с начальными условиями $\mu(0) = 0$ и $\mu'(0) = 2a(0) \neq 0$.

Решение задачи Коши представимо в интегральной форме

$$\psi(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(x,y,t)\varphi(y)dy,\ \lim_{t\to 0^+}\psi(x,t) = \varphi(x).$$

Список литературы

[1] Suslov S. K. Dynamical Invariants for Variable Quadratic Hamiltonians. Physica Scripta. Vol. 81. Num. 5. 2010. 55006 (11 pp).

[2] Meiler M., Cordero-Soto R., Suslov S. K. Solution of the Cauchy Problem for a Time-Dependent Schrödinger Equation. J. Math. Phys. Vol. 49. Num. 7. 2008. 072102.

[3] Cordero-Soto R., Lopez R. M., Suazo E., Suslov S. K. Propagator of a Charged Particle with a Spin in Uniform Magnetic and Perpendicular Electric Fields. Lett. Math. Phys. Vol. 84. Num. 2–3. 2008. p. 159–178.

Фейнмановские интегралы и основные состояния.

$$\mathcal{L} \equiv a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + b_i(x,t)\frac{\partial}{\partial x_i} + C(x,t),$$

a_{ij} =const, b_i линейны по x, C линейно-квадратично по x.

Рассмотрим задачу Коши $u'_t = \mathcal{L}u$, $u|_{t=0} = \delta(x)$.

$$\int\limits_{\substack{\text{все пути из}\\ \text{(0,0) в (x,t)}}} e^{-\int\limits_0^t L(x,\dot{x},\tau)d\tau} = u(x,t) = \left[\det\left(-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial y_j}\right)\right]^{1/2} e^{-S(0,0;x,t)},$$

где $L(x,\dot{x},t \equiv a^{ij}(\dot{x}_i - b_i(x))(\dot{x}_j - b_j(x)) - C(x)$, a^{ij} — коэффициент матрицы, обратной к матрице с коэффициентами a_{ij}.

Дейстие:

$$S(y,s;x,t) = \inf_{\substack{z(s)=y\\ z(t)=x}} \int\limits_s^t L(z,\dot{z},\tau)d\tau.$$

Среднее дейстие: $\lambda = \lim\limits_{|s-t|\to\infty} \frac{1}{t-s} S(y,s;x,t)$ (не зависит от y, x).

Основное состояние $(\mu, \psi(x))$

$$\mathcal{L}\psi(x) = \mu\psi(x),\ \psi(x) > 0,\ \psi(x) \to \infty,\ |x| \to \infty.$$

$\mu = \lambda + 2\langle A, W_0\rangle$ для линейно-квадртичного Лагранжиана. W_0 — матрица, решение алгебраического уравнения Риккати, определенного ниже. Для произвольного Лагранжиана $\lim\limits_{\varepsilon\to\infty} \mu_\varepsilon = \lambda$, где $(\mu_\varepsilon, \psi_\varepsilon(x))$ — основные состояния оператора

$$\mathcal{L}_\varepsilon \equiv \varepsilon^2 a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \varepsilon b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + C(x).$$

Если $\bar{b} \equiv 0$, то $\lim\limits_{\varepsilon\to\infty} \mu_\varepsilon = \max\limits_{x\in\mathbb{R}^n} C(x)$.

Уравнение Риккати

$$\{a_{ij}\} \to A,\ \{b_i\} \to Bx + \bar{b},\ C \to (Cx,x) + (\bar{c},x) + c_0.$$

$$\begin{cases} \dot{W} = 2WAW + [B^T W + WB] + C, \\ \dot{\bar{\omega}} = (2AW + B)\bar{\omega} + 2W\bar{b} + \bar{c}, \\ \dot{q} = -\frac{1}{2}\bar{\omega}^T A\omega + (\bar{b}, \bar{\omega}) + c_0. \end{cases}$$

Алгебраические уравнения Риккати

$$\begin{cases} 0 = 2W_0 A W_0 + [B^T W_0 + W_0 B] + C, \\ 0 = (2AW_0 + B)\bar{\omega}_0 + 2W_0\bar{b} + \bar{c}, \\ \lambda = -\frac{1}{2}\bar{\omega}_0^T A\omega_0 + 2\langle A, W_0\rangle + (\bar{b}, \bar{\omega}_0) + c_0. \end{cases}$$

Список литературы

[1] Feynman R. P., Hibbs A. R. Quantum Mechanics and Path Integrals. New York: McGraw–Hill, 1965.

[2] Овсеевич А.И. Фильтр Калмана и квантование. Пробл. передачи информ. Том. 44. Ном. 1. 2008. стр. 59–79.

[3] Пятницкий А.Л., Шамаев А.С. Ассимптотическое поведение собственных значений и собственных функций несамосопряженного оператора в $\mathbb{R}^n$. Труды семинара им. И.Г.Петровского. Том. 23. 2003. стр. 287–308.

Оператор Колмогорова.

$$Lu = \frac{\partial u^2}{\partial x_1^2} + x_1 \frac{\partial u}{\partial x_2} - \frac{\partial u}{\partial t}.$$

$$u(t,x,y) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi^2 t^2} \exp\left\{ \frac{(x_1-y_1)^2}{t} + 3\frac{(x_1-y_1)(x_2+tx_1-y_2)}{t^2} - 3\frac{(x_2+tx_1-y_2)^2}{t^3} \right\}.$$

Список литературы

[1] Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. В четырех томах. М.: Мир, 1986–1988.