УДК 517.938.5+531.38

Некоторые инвариантные соотношения для общего случая интегрируемости М. Адлера и П. ван Мёрбеке в динамике твердого тела

***П.Е. Рябов*[1,2,3], *С.В. Соколов*[3]**

[1]Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Россия, Москва

[2]Московский физико-технический институт (государственный университет), Россия, Московская область, г. Долгопрудный

[3]Институт машиноведения им. А. А. Благонравова, Россия, Москва

В механике большое внимание уделяется исследованию особых движений механических систем (в том числе и интегрируемых), их аналитическому описанию и изучению характера устойчивости. Количество классических работ по этой тематике весьма велико. В последнее время вопросы об устойчивости таких движений связывается с топологией соответствующих интегрируемых систем, отображением момента и бифуркационным комплексом, отражающим все особенности слоений фазового пространства (см. [1]). В динамике твердого тела особое место занимает класс движений, в которых ранг интегрального отображения равен единице. Такие траектории называются особыми периодическими движениями (ОПД).

Уравнения движения, которые описывают интегрируемый случай М. Адлера и П. ван Мёрбеке, имеют вид уравнений Стеклова-Пуанкаре-Жуковского-Ламба

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M}\times\frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}}, \quad \dot{\mathbf{S}} = \frac{1}{3}\mathbf{S}\times\frac{\partial H}{\partial \mathbf{S}} \tag{1}$$

с квадратичным гамильтонианом

$$H = (\mathbf{M}, A\mathbf{M}) + 2(\mathbf{M}, B\mathbf{S}) + (\mathbf{S}, C\mathbf{S}). \tag{2}$$

Здесь трехмерный вектор $\mathbf{M}$ имеет смысл кинетического момента системы «тело + жидкость», компоненты трехмерного вектора $\mathbf{S}$ пропорциональны компонентам вектора *завихренности жидкости*, а диагональные 3×3–матрицы A, B, C имеют следующий вид

$$\begin{aligned}
&A = diag[\alpha_2^2\alpha_3^2, \alpha_1^2\alpha_3^2, \alpha_1^2\alpha_2^2],\\
&B = diag[(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_1)\alpha_2\alpha_3, (\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)\alpha_1\alpha_3, (\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)\alpha_1\alpha_2],\\
&C = diag[\alpha_2\alpha_3(\alpha_2\alpha_3-4\alpha_1^2), \alpha_1\alpha_3(\alpha_1\alpha_3-4\alpha_2^2), \alpha_1\alpha_2(\alpha_1\alpha_2-4\alpha_3^2)].
\end{aligned}$$

На ко-алгебре $\mathfrak{g} = so(4)^*$ $(so(4) = so(3)\bigoplus so(3))$ с координатными функциями $\mathbb{R}^6(\mathbf{M}, \mathbf{S})$ определены скобки Ли–Пуассона

$$\{M_i, M_j\} = -\varepsilon_{ijk}M_k, \quad \{M_i, S_j\} = 0, \quad \{S_i, S_j\} = -\frac{1}{3}\varepsilon_{ijk}S_k. \tag{3}$$

Скобка (3) имеет две функции Казимира

$$F_1 = (\mathbf{M}, \mathbf{M}), \quad F_2 = (\mathbf{S}, \mathbf{S}).$$

Как известно, для заданной функции Гамильтона H от $\mathbf{M}, \mathbf{S}$ уравнения движения с помощью скобки Ли-Пуассона можно записать в гамильтоновой форме

$$\dot{x} = \{x, H\}. \tag{4}$$

Здесь x любая из переменных M_i, S_j.

На совместном уровне функций Казимира

$$\mathcal{P}_{a,b}^4 = \{F_1 = a^2, F_2 = b^2\} \cong \mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^2$$

индуцированная скобка Пуассона невырождена и ограничение системы (4) дает гамильтонову систему с двумя степенями свободы.

Чтобы утверждать, что система (4) является вполне интегрируемой по Лиувиллю, необходимо указать еще один независимый первый интеграл, находящийся в инволюции с гамильтонианом (2). Мы приводим дополнительный интеграл в следующей симметричной форме

$$\begin{aligned} K = 3\sum_{i,j}\alpha_i(\alpha_j-\alpha_i)M_jS_jS_i^2+\sum_i(\alpha_i-\alpha_j)(\alpha_i-\alpha_k)M_iS_i^3 - \\ -(\mathbf{M},\mathbf{M})\sum_i[\alpha_j\alpha_kM_iS_i+2(\alpha_j^2+\alpha_k^2)S_i^2]. \end{aligned} \quad (5)$$

Отметим, что выражение (5) отличается от форм дополнительного интеграла, использованных в оригинальной работе, посвященной доказательству алгебраической интегрируемости (см. [2]). Дополнительный интеграл (5) наиболее приближен по виду к интегралам, указанным в работе [3] и в книге [4]. Интегралы H и K находятся в инволюции, т.е. $\{H,K\}=0$, если $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0$.

В докладе для общего случая интегрируемости М. Адлера и П. ван Мёрбеке [2] приводятся некоторые инвариантные соотношения, в которых ранг интегрального отображения равен единице. Тем самым определены особые периодические решения, порождающие ребра бифуркационной диаграммы. Все фазовые переменные выражены через набор постоянных и одну вспомогательную переменную, для которой выписано дифференциальное уравнение, интегрируемое в эллиптических функциях времени. Предъявлена явная формула характеристического показателя для определения типа особого периодического решения, которая позволяет исследовать характер устойчивости полученного решения.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 14-01-00119, 16-01-00170, 16-01-00809 и совместного гранта РФФИ и АВО № 15-41-02049.

Литература

1. *Болсинов А.В., Борисов А.В, Мамаев И.С.* Топология и устойчивость интегрируемых систем // УМН. 2010. Т. 65. Вып. 2. С. 71–132.
2. *Adler M., van Moerbeke P.* A new geodesic flow on so(4) // Probability, statistical mechanics and number theory. Advances in mathematics supplementary studies. 1986. Vol. 9. P. 81–96.
3. *Болсинов А. В., Борисов А. В.* Согласованные скобки Пуассона на алгебрах Ли // Матем. заметки. 2002. Т. 72. № 1. С. 11–34.
4. *Борисов А. В., Мамаев И. С.* Динамика твердого тела. Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2005. 576 с.