УДК 530.145

2-тензор-стабильно положительные отображения

К.Ю. Магадов[1]

[1]Московский физико-технический институт (государственный университет)

Объекты имеющие структуру тензорного произведения играют важнейшую роль в квантовой теории информации. Положительность линейных отображений при их тензорном произведении была рассмотрена в недавней работе [1], где было введено понятие n-тензор-стабильно положительных отображений. Эти отображения нужны для того, чтобы предоставить новые ограничения на пропускные способности квантовых каналов.

Определение 1. Линейное отображение $\Phi : B(H_d) \mapsto B(H_d)$ называется n-тензор-стабильно положительным если отображение $\Phi^{\bigotimes n}$ положительно .

Мы полностью характеризуем 2- и 3-тензор-стабильно положительные кубитные отображения (d=2)[2]. Работа начинается с анализа унитальных кубитных отображений Φ удовлетворяющих $\Phi\left[I\right] = I$. Такие отображения могут быть представлены в виде $\Phi\left[X\right] = W\left(\Upsilon\left[VXV^{+}\right]\right)W^{+}$, где V и W некоторые унитарные операторы, $\Upsilon[X] = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{3}\lambda_j \mathrm{tr}[\sigma_j X]\sigma_j = \sum_{j=0}^{3} q_j \sigma_j X \sigma_j, \sigma_0 = I$ и $\{\sigma_{\mathrm{i}}\}_{\mathrm{i}=1}^{3}$ стандартный набор матриц Паули[3]. Следовательно n-кубитное унитальное отображение $\Phi^{\bigotimes n}$ положительно тогда и только тогда, когда $\Upsilon^{\bigotimes n}$ положительно.

Теорема 1. Υ *2-тензор-стабильно положительно тогда и только тогда, когда* Υ^2 *вполне положительно, т.е.* $\lambda_0^2 \pm \lambda_3^2 \geq \left|\lambda_1^2 \pm \lambda_2^2\right|$.

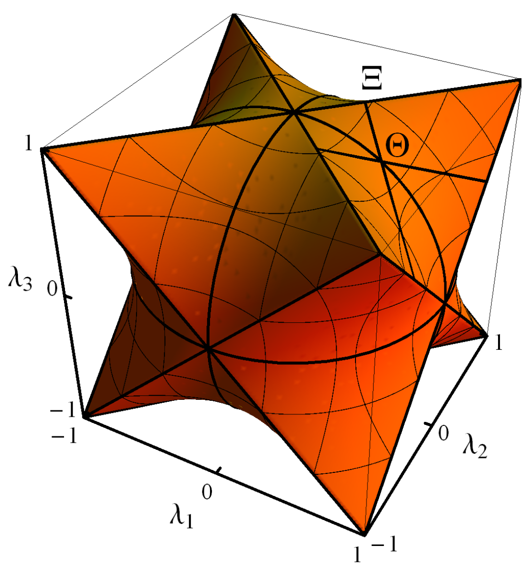

Рис. 1: Область параметров $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, в которой унитальное кубитное отображение Υ 2-тензор-стабильно положительно.

Теорема 2. Υ *3-тензор-стабильно положительно тогда и только тогда, когда выполнены следующие 12 неравенств*:

$$
\begin{aligned}
1-\lambda_i^3-3\lambda_i\lambda_j^2+3\lambda_k^2\geq 0,\\
1+\lambda_i^3+3\lambda_i\lambda_j^2+3\lambda_k^2\geq 0,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где (i,j,k) перестановка индексов (1,2,3).

Положительные отображения внутри конуса положительных неунитальных отображений $\Phi : B(H_2)^+ \mapsto B(H_2)^+$ могут быть представлены в виде $\Phi\left[X\right] = B\left(\Upsilon\left[AXA^+\right]\right)B^+$, где $A, B \in B(H_2)$ положительно определчнные операторы [4,5]. Так как A и B невырожденные, условие $\langle\phi\left|\Phi^{\bigotimes \mathrm{n}}\left[|\psi\rangle\langle\psi|\right]\right|\phi\rangle \geq 0$ выполнено для всех $|\psi\rangle$, $|\phi\rangle \in H_{2^n}$, так как $\widetilde{|\psi\rangle} = A^{\bigotimes n}|\psi\rangle$ и $\widetilde{|\phi} = (B^+)^{\bigotimes n}|\phi\rangle$. Следовательно, положительность тензорного произведения неунитальных отображений $\Phi^{\bigotimes \mathrm{n}}$ эквивалентна положительности тензорного произведения унитальных отображений $\Upsilon^{\bigotimes \mathrm{n}}$. Другими словами, вышеприведчнные теоремы могут быть применены для нахождения 2- и 3-тензор-стабильно положительных неунитальных кубитных отображений.

Работа поддержана Российским Научным Фондом при проекте Номер 16-11-00084 и выполнена в московском физико-техническом институте.

Литература

1. Muller-Hermes A., Reeb D., Wolf M. M., ‘Positivity of linear maps under tensor powers’ // J. Math. Phys. – 2016. – V. 57. – P. 015202.

2. Filippov S. N., Magadov K. Yu., ‘Positive tensor products of qubit maps and 2-tensor-stable positive qubit maps’ // Preprint arXiv:1604.01716 [quant-ph]

3. Ruskai M. B., Szarek S., Werner E., ‘An analysis of completely-positive trace-preserving maps on M_2’ // Linear Algebra Appl. – 2002. – V. 347. – P. 159.

4. Gurvits L., ‘Classical complexity and quantum entanglement’ // J. Comput. System Sci. – 2004. – V. 69. – P. 448.

5. Aubrun G., Szarek S. J., ‘Two proofs of Stormer’s theorem’ // Preprint arXiv:1512.03293 [math.FA].