УДК 517.938.5;531.38

Уравнения Абеля – Якоби для интегрируемого случая Ковалевской -Яхья в динамике твердого тела при нулевой постоянной площадей

П.Е. Рябов[1,2,3]

[1]Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Россия, Москва

[2]Московский физико-технический институт (государственный университет), Россия, Московская область, г. Долгопрудный

[3]Институт машиноведения им. А. А. Благонравова, Россия, Москва

В докладе рассматривается вполне интегрируемая гамильтонова система с двумя степенями свободы, которая описывает динамику волчка Ковалевской–Чаплыгина–Горячева–Яхья ([1], [2], [3], [4]). Гамильтониан системы задается следующим выражением ([1], [2], [3], [4])

$$H = M_1^2 + M_2^2 + 2M_3^2 + 2\lambda M_3 +$$
$$+ a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 - b_1 b_2 \alpha_1\alpha_2 - \frac{1}{4}(b_1^2 - b_2^2)(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) + c\frac{\boldsymbol{\alpha}^2}{\alpha_3^2}.$$

Здесь $\mathbf{p} = \{a_1, a_2, b_1, b_2, \lambda, c\}$ – вектор параметров, $\mathbf{M}, \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^3$ – фазовые переменные. Функция

$$F = \left[M_1^2 - M_2^2 - a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 - \frac{1}{4}(b_1^2 - b_2^2)\alpha_3^2 - c\frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}{\alpha_3^2}\right]^2 +$$
$$+\left[2M_1M_2 - a_1\alpha_2 - a_2\alpha_1 - \frac{1}{2}b_1b_2\alpha_3^2 - 2c\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_3^2}\right]^2 -$$
$$-4\lambda(M_3+\lambda)\left[M_1^2 + M_2^2 + c\left(1 + \frac{\boldsymbol{\alpha}^2}{\alpha_3^2}\right)\right] +$$
$$+\lambda\alpha_3\{_1[4a_1 - 2b_1b_2\alpha_2 - (b_1^2 - b_2^2)\alpha_1] +$$
$$+M_2[4a_2 - 2b_1b_2\alpha_1 + (b_1^2 - b_2^2)\alpha_2]$$

является дополнительным интегралом на симплектическом листе, определяемого условиями $(\mathbf{M}, \boldsymbol{\alpha}) = 0, \boldsymbol{\alpha}^2 = 1$ ([1], [2], [3]). Кроме тото, в работах [2], [3] и [4] рассматривались задачи построения переменных разделения для произвольных значений параметров вектора $\mathbf{p}$.

Спектральная кривая $E(z,\zeta)$, коэффициентами которой являются функции H, F и $\boldsymbol{\alpha}^2$, имеет следующий явный вид [2], [3]:

$$E(z,\zeta) = 0, \tag{1}$$

где

$$E(z,\zeta) = \zeta^2 + d_1\zeta + d_0,$$
$$d_1 = z^6 - 2(h+\lambda^2)z^4 + \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2)(c-\lambda^2)\boldsymbol{\alpha}^2 +$$
$$+[f + 2(c+\lambda^2)(h+\lambda^2) - \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2)\boldsymbol{\alpha}^2 - (c-\lambda^2)^2]z^2,$$
$$d_0 = \frac{1}{16}[(a_1 - b_1z)^2 + (a_2 - b_2z)^2][(a_1 + b_1z)^2 + (a_2 + b_2z)^2]\times$$
$$\times[(z-\lambda)^2 - c][(z+\lambda)^2 - c]\boldsymbol{\alpha}^4.$$

Кривую (1) можно рассматривать как нулевой уровень отображения $E:\overline{\mathbb{C}}\times\overline{\mathbb{C}}\to\overline{\mathbb{C}}$. Обозначим через $\tilde{\Sigma}$ множество таких значений интегральных постоянных, для которых 0 является критическим значением отображения E. Множество $\tilde{\Sigma}$ в конечных точках $\overline{\mathbb{C}}\times\overline{\mathbb{C}}$ определяется системой уравнений

$$E(z,\zeta)=0, \frac{\partial}{\partial z}E(z,\zeta)=0, \frac{\partial}{\partial \zeta}E(z,\zeta)=0. \qquad (2)$$

Цель настоящего доклада, исходя из особенностей спектральной кривой, предъявить разделенные уравнения Абеля–Якоби для следующих значений параметров

$$a_1=-1, a_2=0, b_1=0, b_2=0, c=0, \boldsymbol{\alpha}^2=1. \qquad (3)$$

Выбор параметров (3) отвечает интегрируемому случаю Ковалевской-Яхья в динамике твердого тела.

Система (2) эквивалентна

$$Q(s,f,h)=0, Q_s^{'}(s,f,h)=0, \qquad (4)$$

где

$$\begin{aligned} Q(s,f,h)&=[(s-\lambda^2)(s-2h)+f-1]\times \\ &\times\{s[f+(s-\lambda^2)(s-2h+\lambda^2)]-\lambda^2(s^2-\lambda^2 s+1)\}. \end{aligned} \qquad (5)$$

Система (4) совместна, если

$$f=1,\ f=1+\left(h-\frac{\lambda^2}{2}\right)^2, \begin{cases} f=(s+\lambda^2)^2-\dfrac{\lambda^2(\lambda^2+2s)}{s^2}, \\ h=\dfrac{\lambda^2}{2}-s+\dfrac{\lambda^2}{2s^2}. \end{cases} \qquad (6)$$

Множество (6) содержит бифуркационную диаграмму интегрируемого случая Ковалевской–Яхья при нулевой постоянной площадей [5].

Отметим, что в такой форме многочлен пятой степени (5) получен впервые. Соответствующие уравнения Абеля–Якоби формально написать несложно

$$\frac{dq_1}{\sqrt{Q(q_1)}}+\frac{dq_2}{\sqrt{Q(q_2)}}=0, \frac{q_1 dq_1}{\sqrt{Q(q_1)}}+\frac{q_2 dq_2}{\sqrt{Q(q_2)}}=dt.$$

Однако до сих пор связь между исходными фазовыми переменными $\mathbf{M},\boldsymbol{\alpha}$ и переменными разделения (q_1,q_2) не найдена, в связи с этим обстоятельством разделение переменных нельзя считать завершенным.

Работа частично поддержана грантами РФФИ (№ 14-01-00119, 15-41-02049 и 16-01-00170).

Литература

1. *Yehia H. M.* New integrable problems in the dynamics of rigid bodies with the Kovalevskaya configuration: I. The case of axisymmetric forces // Mech. Res. Commun. **23**, (5), 1996, pp. 423–427.
2. *Tsiganov A.V.* On the Kowalevski-Goryachev-Chaplygin gyrostat // Journal of Physics A: Mathematical and General, **35**, (22), 2002, pp. L309–L318.
3. *Цыганов А. В.* Разделение переменных в гиростате Ковалевской-Горячева-Чаплыгина // ТМФ, **135**, (2), 2003, с. 240–247.
4. *Борисов А. В., Мамаев И. С.* Современные методы теории интегрируемых систем. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 296 с.
5. *Харламов М. П., Рябов П. Е.* Бифуркации первых интегралов в случае Ковалевской–Яхья // Регулярная и хаотическая динамика, **2,** (2), 1997, с. 25–40.