

Энтропийно-энергетические неравенства для кутритных систем

Манько В.И.^{1,2,3} и Маркович Л.А.^{3,4*}

¹Федеральное государственное бюджетное учреждение науки,

Физический институт им. П.Н.Лебедева, Российской академии наук,

⁴Национальный исследовательский Томский государственный университет,

³Московский физико-технический институт, государственный университет,

⁴Институт проблем передачи информации имени А. А. Харкевича,

⁴kimo1@mail.ru

Аннотация

Рассмотрено энтропийно-энергетическое неравенство для трехуровневого атома, реализованного на примере сверхпроводящих цепей с использованием джозефсоновских контактов. Предложено использовать неотрицательность относительной энтропии кутритной квантовой системы для проверки томографирования квантовых состояний кудитов. Полученные соотношения рассмотрены подробно на примере температурной матрицы плотности.

1

Ключевые слова: кутрит, сверхпроводящие цепи, энтропийно - энергетические неравенства

1 Введение

Понятие квантовой запутанности [1] хорошо изучено на примере систем с подсистемами, например двух частиц со спинами $j = 1/2$. Составные системы имеют корреляции между подсистемами, поэтому физический смысл запутанности для них определяется естественным образом [2]. В системах без подсистем, таких как кутрит или кудит, понятия запутанности и корреляции были изучены сравнительно недавно в [3, 4, 5]. Наличие корреляций в системах с подсистемами обнаруживаются с помощью различных неравенств, например Белла [6, 7, 8], нарушающегося для запутанных состояний [9], или энтропийных и информационных неравенств для матриц плотности системы и ее подсистем. Как было показано в [10], аналогичные неравенства могут быть получены и для систем без подсистем.

В [11] предложено использовать метод кубитного портрета для получения новых энтропийных неравенств для кудитных систем. В [12] этот метод был применен для изучения понятий сепарабельности и запутанности систем со спином $j = 1$ (одиночного кутрита). В [11] получено новое энтропийное неравенство для такой системы. В

¹Материалы статьи связаны с докладом Манько В.И. на Международном семинаре «Проблемы квантовой теории сильных полей» Томск, 6 – 11 июня 2016 г.

[13] неравенство на относительную энтропию [14] было переписано в энергетической форме. Его также легко распространить на случай системы из одного кутрита.

Целью работы является сравнение энтропийного и энергетического неравенств для кутритной системы. Такая система может быть реализована как трехуровневый искусственный атом на базе джозефсоновского контакта (см. например [15, 16]). Матрица плотности кутритного состояния может быть измерена (см. например [17]) методом квантовой томографии [18], где квантовые состояния ассоциируются с вероятностями [19]. Полученные неравенства подробно рассмотрены на примере температурной матрицы плотности.

Статья построена следующим образом. В первом разделе приведены определение метода кубитного портрета матрицы плотности и энтропийное неравенство для системы из одного кутрита. Во втором разделе соотношения для энергии и относительной энтропии записаны для кутритной системы, в частности, для матрицы плотности состояния в термодинамическом равновесии. Проведено сравнение двух неравенств для кутритных систем. Полученные результаты проиллюстрированы на примере матрицы плотности для кутрита с одним параметром и обсуждены возможности экспериментальной проверки новых энтропийных неравенств для сверхпроводящих цепей.

2 Портрет матрицы плотности

Рассмотрим систему, состоящую из одного кутрита, состояние которой описывается матрицей плотности

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} \end{pmatrix}, \quad \rho = \rho^\dagger, \quad Tr\rho = 1. \quad (1)$$

По определению, собственные числа $\{\lambda_i\}_{i=1,2,3}$ матрицы плотности неотрицательны. Согласно методу кубитного портрета, дополним (1) нулевыми строкой и столбцом до матрицы $\tilde{\rho}$ размерности 4×4 . Свойства матрицы плотности (1) не меняются, но добавляется четвертое нулевое собственное значение. Полученная матрица может описывать состояние в четырехмерном гильбертовом пространстве \mathcal{H} . Тогда, можно записать две редуцированные матрицы плотности для $\tilde{\rho}$, описывающие "искусственные подсистемы" кутритной системы как [11]

$$\tilde{\rho}_1 = \begin{pmatrix} \rho_{11} + \rho_{22} & \rho_{13} \\ \rho_{31} & \rho_{33} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\rho}_2 = \begin{pmatrix} \rho_{11} + \rho_{33} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Энтропии фон Неймана для кутрита и его "искусственных подсистем" имеют вид

$$S = -Tr\tilde{\rho}\ln\tilde{\rho} = -\sum_{i=1}^4 \tilde{\lambda}_i \ln\tilde{\lambda}_i, \quad \tilde{S}_1 = -Tr\tilde{\rho}_1 \ln\tilde{\rho}_1, \quad \tilde{S}_2 = -Tr\tilde{\rho}_2 \ln\tilde{\rho}_2. \quad (3)$$

Квантовая информация для кутрита может быть введена следующим образом

$$I_q = \tilde{S}_1 + \tilde{S}_2 - \tilde{S}_{12}, \quad I_q \geq 0. \quad (4)$$

Тогда, используя (3), можно записать для матрицы (1) следующее неравенство [11]

$$S \leq -Tr\left\{ \begin{pmatrix} \rho_{11} + \rho_{22} & \rho_{13} \\ \rho_{31} & \rho_{33} \end{pmatrix} \ln \begin{pmatrix} \rho_{11} + \rho_{22} & \rho_{13} \\ \rho_{31} & \rho_{33} \end{pmatrix} \right\} - Tr\left\{ \begin{pmatrix} \rho_{11} + \rho_{33} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} \ln \begin{pmatrix} \rho_{11} + \rho_{33} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} \right\}, \quad (5)$$

Данное неравенство соответствует квантовым корреляциям, возможным в состоянии одного кутрита, не являющегося двухчастичной системой.

3 Соотношения для энергии и относительной энтропии

Мерой различия между двумя квантовыми состояниями может служить относительная энтропия [14]. Пусть имеются две системы с матрицами плотности ρ и σ . Тогда энтропия состояния ρ относительно состояния σ задается следующим образом

$$Tr(\rho \ln \rho - \rho \ln \sigma) \geq 0. \quad (6)$$

Пусть H - матрица гамильтониана кудитной системы. Выберем

$$\sigma = \frac{e^H}{Tr(e^H)}, \quad \sigma \geq 0, \quad Tr\sigma = 1. \quad (7)$$

Используя определение энтропии фон Нейманна $S = -Tr(\rho \ln \rho)$ в [13], неравенство (6) было переписано в энергетической форме

$$S + \langle H \rangle \leq \ln(Tr e^H), \quad (8)$$

где $\langle H \rangle = Tr(\rho H)$ - средняя энергия. Выберем матрицу плотности состояния в термодинамическом равновесии

$$\sigma(\beta)_H = \frac{e^{-\beta H}}{Tr(e^{-\beta H})}, \quad \sigma(\beta)_H \geq 0, \quad Tr\sigma(\beta)_H = 1,$$

где $T = 1/\beta$ - температура. Используя определения статистической суммы $Z(\beta) = Tr(e^{-\beta H})$, неравенство (8) может быть записано как

$$S + \langle H \rangle \leq \ln Z(\beta = -1). \quad (9)$$

3.1 Система из одного кутрита

Пусть гамильтониан H задается матрицей

$$H = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{pmatrix}, \quad H = H^\dagger. \quad (10)$$

Тогда, $Tr e^H = e^{E_1} + e^{E_2} + e^{E_3}$, где E_1, E_2 и E_3 уровни энергии, являющиеся решением секулярного уравнения $det(H - EI_3) = 0$.

Выберем матрицу гамильтониана с элементами $H_{12} = H_{21} = H_{23} = H_{32} = 0$. Тогда неравенство (8) имеет вид

$$S \leq -Tr\rho \ln \left(\frac{U \begin{pmatrix} e^{-\beta E_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\beta E_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\beta E_3} \end{pmatrix} U^\dagger}{Tr\{U \begin{pmatrix} e^{-\beta E_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\beta E_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\beta E_3} \end{pmatrix} U^\dagger\}} \right), \quad (11)$$

где U - унитарная матрица из собственных векторов матрицы H , а ее собственные значения равны

$$E_1 = H_{22}, \quad E_{2,3} = \frac{H_{11} + H_{33} \mp \sqrt{H_{11}^2 - 2H_{11}H_{33} + H_{33}^2 + 4H_{13}H_{31}}}{2}. \quad (12)$$

Очевидно, что выбор гамильтониана и параметра β определяет соотношение между обоими неравенствами.

В случае, когда параметр $\beta = 0$, неравенство (11) имеет вид $S \leq \ln 3$. При $\beta \rightarrow \infty$ правая часть неравенства (11) стремится к бесконечности. В качестве примера выберем следующие матрицы

$$\rho = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1+b & 0 & 0 \\ 0 & 1+b & 0 \\ 0 & 0 & 1-2b \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

где $-1 \leq b \leq 1/2$. Результаты приведены на рисунке 1. Черной линией показана полная энтропия для ρ , серой линией - правая часть неравенства (5), а пунктирные линии показывают правую часть неравенства (11) для разных $\beta = \{-1; 5; 0.1\}$. Видно, что

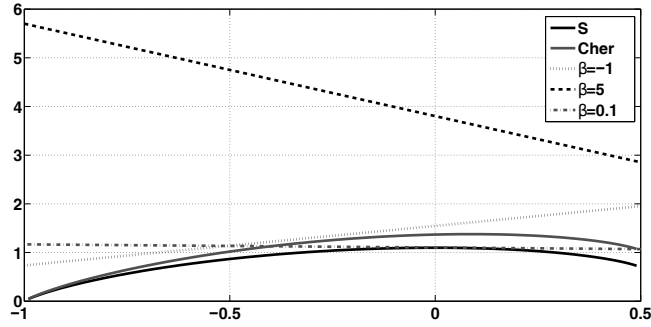


Рис. 1: S (черная линия)- полная энтропия, $Cher$ (серая линия) - правая часть неравенства (5), (пунктирные линии) - правая часть неравенства (11) для разных β .

в зависимости от выбора β правая часть энергетического неравенства располагается выше или ниже правой части энтропийного неравенства. Таким образом, можно подобрать параметр β таким, что правая часть (11) будет давать минимальную верхнюю границу для энтропии всей системы для энергетического неравенства.

3.2 Заключение

В работе исследована связь между энтропийным неравенством для кутрита, полученным с помощью метода кубитного портрета [4] и энергетическим неравенством для кутрита [13]. Неравенства могут быть проверены экспериментально на сверхпроводящих цепях, где матрица плотности кутритного состояния измеряется методом квантовой томографии. Заметим, что система из одного кутрита не имеет подсистем. Полученные соотношения могут быть выражены в терминах томографических вероятностей в явном виде. Это дает возможность получить новый метод изучения квантовых корреляций в системах из одного кудита, так как томографические вероятности

можно измерять напрямую. Измерение этих вероятностей дает информацию о квантовых корреляциях в системах без подсистем.

В работе показано, что для термодинамически равновесных состояний значение температуры определяет соотношение между обоими неравенствами. В случае высоких температур правая часть энергетического неравенства существенно превышает правую часть энтропийного неравенства. В случае нулевого параметра β энтропия системы ограничена константой. Таким образом, при определенной температуре правая часть энергетического неравенства дает минимальную верхнюю границу энтропии всей системы для энергетического неравенства.

Благодарность

Исследование Манько В.И. в части 2 выполнено при поддержке Программы повышения конкурентоспособности Томского государственного университета. Исследование Маркович Л.А. в части 3 выполнено в ИПФИ РАН за счет гранта Российского научного фонда (проект № 16-08-01285 А).

Список литературы

- [1] E. Schrödinger, *Naturwissenschaften*, 23, 807–812, 1935.
- [2] M.A. Can, A.A. Klyachko, A.S. Shumovsky, *J. of Optics B*, 7(2), L1–L3, 2005.
- [3] M.A. Man'ko, V.I. Man'ko, *Phys. Scr.*, T160, 014030, 2014.
- [4] V.N. Chernega, O.V. Man'ko, V.I. Man'ko, *J. Russ. Laser Res.*, 35(3), 278–290, 2014.
- [5] V.I. Man'ko, L.A. Markovich, *J. Russ. Laser Res.*, 35(4), 355–361, 2014
- [6] J.F. Clauser, M.A. Horne, A. Shimony, R.A. Holt, *Phys. Rev. Lett.*, 23(15), 880, 1969.
- [7] E.H. Lieb, M.B. Ruskai, *Adv. Math*, 12, 269–273, 1974.
- [8] S. Wehner, A. Winter, *J. New J. Phys.*, 12, 025009, 2010.
- [9] B.S. Cirel'son, *J.Lett. Math. Phys.*, 4(2), 93–100, 1980.
- [10] V.I. Man'ko, L.A. Markovich, *J. Russ. Laser Res.*, 35(5), 518–524, 2014.
- [11] V.N. Chernega, O.V. Man'ko, V.I. Man'ko, *J. Russ. Laser Res.*, 34(4), 383–387, 2013.
- [12] V.I. Man'ko, L.A. Markovich, *J. Russ. Laser Res.*, 36(2), 110–118, 2015.
- [13] A. Figueroa, J. Lopez, O. Castanos, R. Lopez-Pena, M.A. Man'ko, V.I. Man'ko, *J. of Phys. A: Math. and Theor.*, 48(6), 065301, 2015.
- [14] M.A. Nielsen, I.L. Chuang, Cambridge University Press, 2010.
- [15] E.O. Kiktenko, A.K. Fedorov, A.A. Strakhov, V.I. Man'ko, *Phys. Lett. A*, 379(22), 1409–1413, 2015.
- [16] A. Glushkova, E. Glushkov, V.I. Manko, *J. Russ. Laser Res.*, 37(3), 236–243, 2016.
- [17] Y. Shalibo, R. Resh, O. Fogel, D. Shwa, R. Bialczak, J.M. Martinis, N. Katz, *Phys. Rev. Lett.*, 110, 100404, 2013.

[18] V.I. Man'ko, O.V. Man'ko, JETP, 85 (3), 430, 1997.

[19] A. Ibort, V.I. Man'ko, G. Marmo, A. Simoni, F. Ventriglia, Phys. Scr. 79(6), 2009.