УДК 519.63

Метод итерируемой приближенной факторизации операторов бикомпактной схемы для многомерных неоднородных гиперболических систем

М.Д. Брагин[1], *Б.В. Рогов*[1,2]

[1]Московский физико-технический институт (государственный университет)

[2]Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

Гиперболические уравнения и системы лежат в основе многих моделей, применяемых для решения задач физики и техники. Одной из важнейших задач вычислительной математики является разработка надежных высокоточных схем для численного решения данных уравнений.

В работе [1] предлагаются гибридные бикомпактные схемы. Эти конечно-объемные конечно-разностные схемы имеют четвертый порядок аппроксимации по пространству и произвольно высокий порядок аппроксимации по времени в областях гладкости решения. Уравнения бикомпактных схем являются двухточечными по пространству, что обеспечивает удобство постановки граничных условий и сохранение высокого порядка аппроксимации на произвольно неравномерных и адаптивных сетках. Наследуя хорошее спектральное разрешение компактных схем, бикомпактные схемы отличаются от них малыми и локализованными немонотонностями вблизи разрывов решения. Для монотонизации решения вблизи разрывов используется методика гибридной схемы и схемы-партнеры с минимальной диссипацией на минимальном пространственно-временном шаблоне.

Тем не менее, неявные бикомпактные схемы [1] вычислительно трудоемки в случае многомерных квазилинейных систем. Для решения этой проблемы и ускорения счета разумно использовать известные методы пространственного расщепления.

В работе [2] рассмотрено локально-одномерное (покомпонентное) расщепление, в том числе применительно к бикомпактным схемам. Доказано, что данное расщепление является точным в случае однородного скалярного квазилинейного гиперболического уравнения. Однако, оно будет приводить к понижению высокого порядка аппроксимации по времени до первого в неоднородном или векторном случаях [3]. Из этого следует, что область применимости локально-одномерных бикомпактных схем ограничена задачами с разрывами.

Настоящий доклад посвящен итерационному методу, основанному на приближенной факторизации [4-8] операторов бикомпактной схемы и позволяющему одновременно сохранить высокую точность по времени при уменьшении сложности вычислений. Выводятся уравнения этого метода в случае нестационарной двумерной неоднородной системы квазилинейных уравнений гиперболического типа. Доказывается сходимость итераций в случае нестационарного двумерного линейного уравнения переноса. Показывается, что переход к итерационным поправкам существенно упрощает правые части системы уравнений метода. На примере тестовой задачи для двумерного неоднородного уравнения Хопфа и методов интегрирования по времени SDIRK 3-го, 4-го, 5-го порядков демонстрируется численная сходимость факторизованных бикомпактных схем с высоким порядком (3-м, 4-м, 5-м соответственно). На примере двумерной задачи о взрыве в идеальном газе показывается, что факторизованная бикомпактная схема быстрее нефакторизованной в 4 раза при одной и той же точности решения и последовательном расчете. При увеличении же числа пространственных измерений и размерности вектора неизвестных может быть достигнут еще больший выигрыш в скорости счета. Более того, факторизованные бикомпактные схемы допускают эффективную параллельную реализацию.

Литература

1. *Брагин М.Д., Рогов Б.В.* Гибридные бикомпактные схемы с минимальной диссипацией для уравнений гиперболического типа. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 6. С. 958-972.
2. *Брагин М.Д., Рогов Б.В.* О точном пространственном расщеплении многомерного скалярного квазилинейного гиперболического закона сохранения. // Докл. АН. 2016. Т. 469. № 2. С. 143-147.
3. *LeVeque R.* Numerical Methods for Conservation Laws. Berlin: Birkhäuser, 1999. 228 p.

4. *Яненко Н.Н.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967. 197 с.
5. *Марчук Г.И.* Методы расщепления. М.: Наука, 1988. 263 с.
6. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1989. 616 с.
7. *Beam R.M., Warming R.F.* An implicit finite-difference algorithm for hyperbolic systems in conservation-law form. // J. Comput. Phys. 1976. V. 22. P. 87-110.
8. *Van der Houwen P.J., Sommeijer B.P.* Approximate factorization for time-dependent partial differential equations. // J. Comput. Appl. Math. 2001. V. 128. P. 447-446.