УДК 623-4

МИНИМАЛЬНЫЕ КУБИЧЕСКИЕ ЯЧЕЙКИ ИЗ СТЕРЖНЕЙ И ПЛЁНОК ДЛЯ КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА

Скворцова А.А.*, студентка*

ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»

Драцкая А.И.*, ученица*

МБОУ «Гимназия №5» городского округа Королёв (мкр. Юбилейный) Московской области

Аннотация

Работа относится к области композиционных материалов. Основу композиционного материала составляют силовые ячейки. В этой работе изучаются свойства кубической силовой ячейки. Изучаются два способа построения кубической ячейки. Первый способ представляет конструкцию из стержней. Второй способ заключается в формировании конструкции из плёнок. В обоих случаях задача сводится к минимизации массы элементарной кубической ячейки композиционного материала. В случае стержневой кубической ячейки достаточно сравнить небольшое количество возможных вариантов конструкций и выбрать наиболее лёгкую ячейку. В случае плёночных конструкций решение задачи требует применить сложный математический аппарат дифференциальных уравнений в частных производных, при этом получаются уравнения, как правило, не разрешимые аналитическими методами, их решение возможно только приближёнными компьютерными методами. Предлагается экспериментальный способ построения минимальных плёночных структур. Этот способ основан на аналогии с мыльными плёнками, натянутыми на заданный контур. В математике это направление известно под термином минимальные поверхности.

Основу композиционного материала составляют силовые ячейки, соединённые друг с другом в единую матрицу. Размеры и формы ячеек определяют прочностные свойства материала. В этой работе изучаются свойства кубической ячейки как основного структурного элемента силовой матрицы. Это армирующая конструкция композиционного материала. Содержательная формулировка задачи сводится к созданию самой лёгкой армирующей, силовой конструкции из стержней и плёнок с элементарной ячейкой в виде куба. Формальная постановка задачи – это минимизация длины стержней в стержневой кубической ячейке и минимизация площади поверхности плёнок в плёночной кубической ячейке. Под кубической ячейкой понимаем геометрическую фигуру, ограничивающую пространство в виде куба силовыми стержнями или плёнками, дополнительно к которым могут быть присоединены не силовые элементы, которые не учитывают при расчёте на прочность и которые не выходят за пределы указанного куба.

Идея этой работы появилась на основе физической аналогии лёгких конструкций с мыльными пузырями. Решение задачи о лёгкой и прочной конструкции можно найти в природном явлении мыльных пузырей [1]. Поверхность мыльного пузыря имеет минимальную площадь, поэтому оболочка очень лёгкая. Однако поверхность мыльного пузыря не имеет контура, натянута сама на себя. Если мыльную плёнку натянуть на контурную рамку, то получится пример минимальной поверхности. Такие поверхности не всегда имеют минимальную площадь. Классический пример – два кольца с натянутой на них мыльной плёнкой в форме катеноида. В этом примере есть два контура, которые не соединены друг с другом. Цель работы заключается в создании лёгкой силовой конструкции кубической формы на едином контуре.

Сначала решена более простая задача о минимальной, самой лёгкой ячейке композиционного материала с армированием стержневыми элементами. Эта задача решается методом перебора конечного числа возможных вариантов составления куба из стержней. Нужно так составить стержни, чтобы на них можно было создать уже не силовую лёгкую конструкцию в форме куба. Как составить самую лёгкую кубическую структуру из стержней? Исходной структурой служит каркас куба из стержневых рёбер. Пусть a – длина ребра куба. Тогда исходная стержневая кубическая ячейка будет иметь массу, которая соответствует общей длине 12a всех рёбер куба. Это не рациональная структура с позиции массы. В этой ячейке-кубе есть лишние рёбра. Например, если убрать любое одно ребро куба, то каркас не развалится, но масса арматуры станет меньше, будет равна 11a. Форма кубической ячейки сохранится, потому что по условию задачи силовой каркас можно дополнять какими угодно не силовыми элементами, например, можно заменить исключённое ребро куба тонкой нитью. Можно поочерёдно убирать рёбра куба, пока структура будет кубической и не развалится. Минимальное число рёбер равно 7. Больше рёбра из куба исключать нельзя, потому что либо кубический каркас развалится, перестанет быть единой конструкцией, либо получится элементарная ячейка другой формы, не кубической. В этой работе изучаются свойства только кубической ячейки, другие формы элементарных ячеек армирования композиционных материалов не рассматриваются – это другие работы и другие исследования. Продолжая исследование и синтез лёгкой силовой кубической ячейки, закономерно задать вопрос о существовании более лёгких структур по сравнению с семью рёбрами. Другие более лёгкие структуры существуют. Для доказательства достаточно привести пример такой структуры, построить практически более лёгкую кубическую ячейку. Такая ячейка существует. Например, структура типа противотанкового ежа из четырёх диагоналей куба имеет длину стержней 6,93a, то есть стала легче и соответствует количеству рёбер куба 6,93. Следует вспомнить, что такая диагональная конструкция, похожа на противотанковый ёж, изобретённый генерал-майором М.Л.Гориккером в начале Великой отечественной войны. Эта сравнительно лёгкая и прочная конструкция выдерживала массу тяжёлого танка до шестидесяти тонн. Очередная задача – доказательство единственности полученного оптимального решения. Продолжая исследование, удалось построить пример и доказать существование ещё более лёгкой структуры кубической формы. Самая лёгкая структура, которую удалось найти, – это две диагонали верхней грани, две диагонали нижней грани и вертикальный стержень. Такая структура имеет длину стержней 6,66а, соответствует количеству рёбер куба 6,66, то есть стала ещё легче. Возможно, есть другие более лёгкие кубические структуры из стержней, но их пока найти не удалось. Однако применение аналогии мыльных плёнок вместо сложного математического описания минимальных поверхностей позволило наметить ход дальнейших исследований для поиска минимальных стержневых структур кубической ячейки. Вполне возможно, что существуют более лёгкие стержневые кубические ячейки по сравнению с соответствующей 6,66а.

На рис.1 показан поиск самой лёгкой стержневой структуры куба отмеченными ранее способами. Сначала поочерёдно исключались горизонтальные и вертикальные рёбра куба, пока конструкция не разваливалась, представляла единое целое в арматуре композиционного материала. Потом, после изучения всех возможных вариантов исключения рёбер куба, начался поиск принципиально новых, диагональных кубических структур.

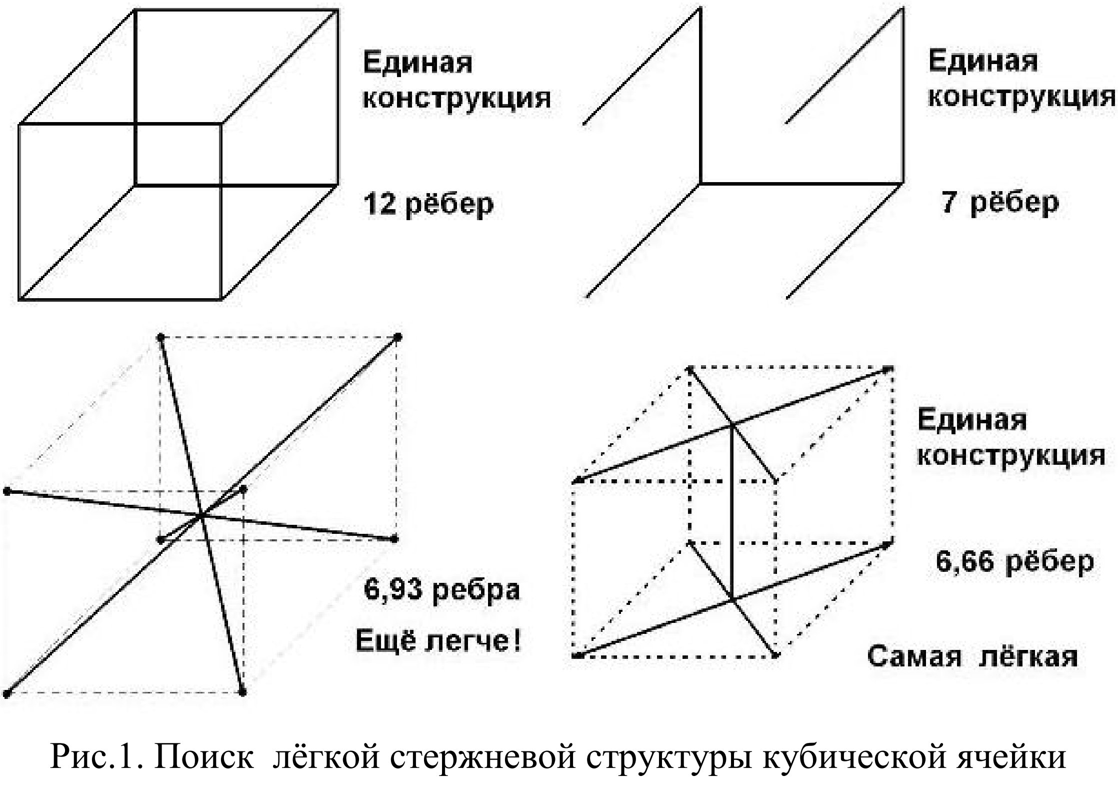

Рис.1. Поиск лёгкой стержневой структуры кубической ячейки

Вторая задача более сложная. Теперь требуется составить самую лёгкую кубическую структуру не из стержней, а из плёнок. Теоретически решить такую задачу очень сложно. В математике решению подобных задач посвящён раздел минимальных поверхностей. Это область дифференциальных уравнений с частными производными, область краевых задач, область дифференциальной геометрии и т.д. Уравнения, характеризующие минимальные поверхности, получаются настолько сложными, что аналитическими методами их обычно не решают. Известны только несколько частных случаев, для которых получены аналитические решения уравнений минимальных поверхностей. Такая сложная задача исследуется очень просто с помощью физической аналогии минимальных поверхностей в виде мыльных плёнок. Мыльная плёнка натягивается на контур в виде минимальной поверхности. Силовой армирующей конструкцией будет кубическая оболочка. Пусть длина ребра куба равна а. Тогда шесть граней куба будут иметь площадь $6a^2$. Для поиска минимальной поверхности надо изготовить кубический контур из тонкой проволоки и опустить его в мыльный раствор. Казалось бы, что решение задачи очевидно, потому что мыльные плёнки натянутся по граням куба. Однако это не всегда так. Действительно, возможно натяжение мыльных плёнок по граням, но существует также другое решение с маленьким пустым квадратом в центре куба. Маленьким пустым квадратом в середине куба пока пренебрегаем. Это материал для дальнейшей работы. Предполагается, что учёт маленького пустого квадрата в середине куба приведёт к синтезу самой лёгкой кубической ячейки композиционного материала из плёнок. Также предполагается, что стержневая конструкция, соответствующая отрезкам схождения мыльных плёнок, приведёт к самой лёгкой стержневой кубической ячейке. Это направление для дальнейших исследований. Если маленьким пустым квадратом в середине куба пренебречь, предположить, что все мыльные плёнки имеют плоский треугольный вид и сходятся в центре куба, то получится плёнка из восьми сходящихся в центре куба треугольников с общей площадью приблизительно $3{,}4a^2$, то есть почти в два раза легче. На практике эксперимент с мыльными плёнками позволил получить плёнки либо на шести гранях куба, либо сходящиеся к маленькому пустому квадрату в середине. При этом первый вариант очень легко переходил во второй. Это означает существование метастабильного состояния системы с локальным минимумом потенциальной энергии. Однако во время экспериментов никогда не удалось получить какого-либо третьего вида расположения мыльных плёнок. Это означает, что второй вариант является глобальным минимальным значением потенциальной энергии системы, возможно экстремальным. При повреждении хотя бы одной из плёнок во втором варианте система сразу же лопалась, разрушалась. Вообще говоря, были ещё варианты мыльных плёнок на кубе с множеством пузырей. Такие варианты не изучались, вряд ли они являются оптимальными. На рис.2 показан вид самой лёгкой плёнки на кубе с маленьким пустым квадратом в середине куба.

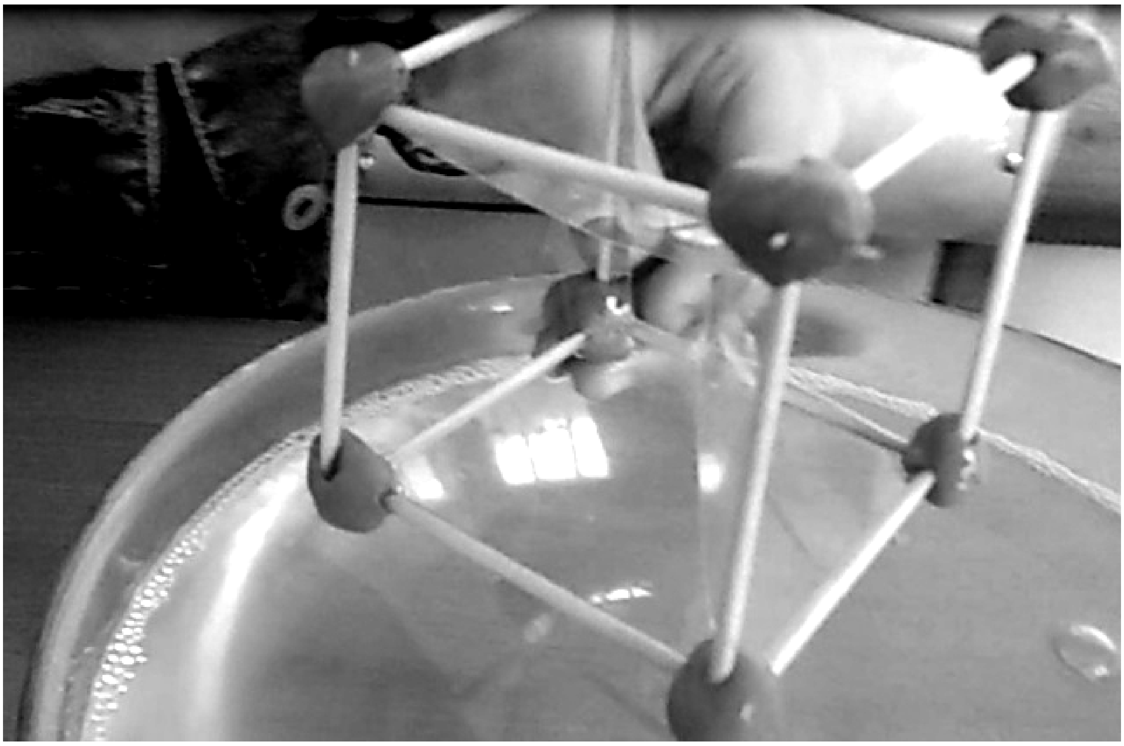

Рис.2. Минимальная экспериментальная плёночная структура кубической ячейки

На основе этой плёночной структуры построена бумажная модель лёгкой кубической композитной структуры перспективного материала. Основой такой модели является выкройка правильного пятиугольника. Это означает, что предложенная плёночная структура композиционного материала вполне может быть изготовлена технологически. Базовым элементом бумажной модели служит правильная четырёхугольная пирамида. В основании пирамиды лежит квадрат со сторона а. Высота пирамиды равна а/2, то есть равна половине ребра куба, половине его высоты. Таким образом, в куб можно вписать две пирамиды, перевёрнутые друг относительно друга, имеющие общую вершину в центре куба. Кубическая ячейка композиционного материала представляется силовыми плёнками – боковыми гранями пирамиды. Плёнки на основаниях этих двух пирамид не нужны по условию задачи, потому что силовой кубический каркас уже сформирован боковыми гранями двух правильных четырёхугольных пирамид. Базовый элемент композиционного материала позволяет изготовить не только плоские панели, но также искривлённые конструкции. Это очень важно для авиации, где с позиции аэродинамики требуется применение лёгких и прочных конструкций сложной формы. Это важно для нового перспективного строительства оригинальных зданий и сооружений, для воплощения новых архитектурных решений в практику. Наконец, это важно экономически, потому что уменьшает расход материала, делает конструкцию более дешёвой.

На рис.3 представлены бумажные панели, соединение которых формирует предложенную плёночную кубическую структуру.

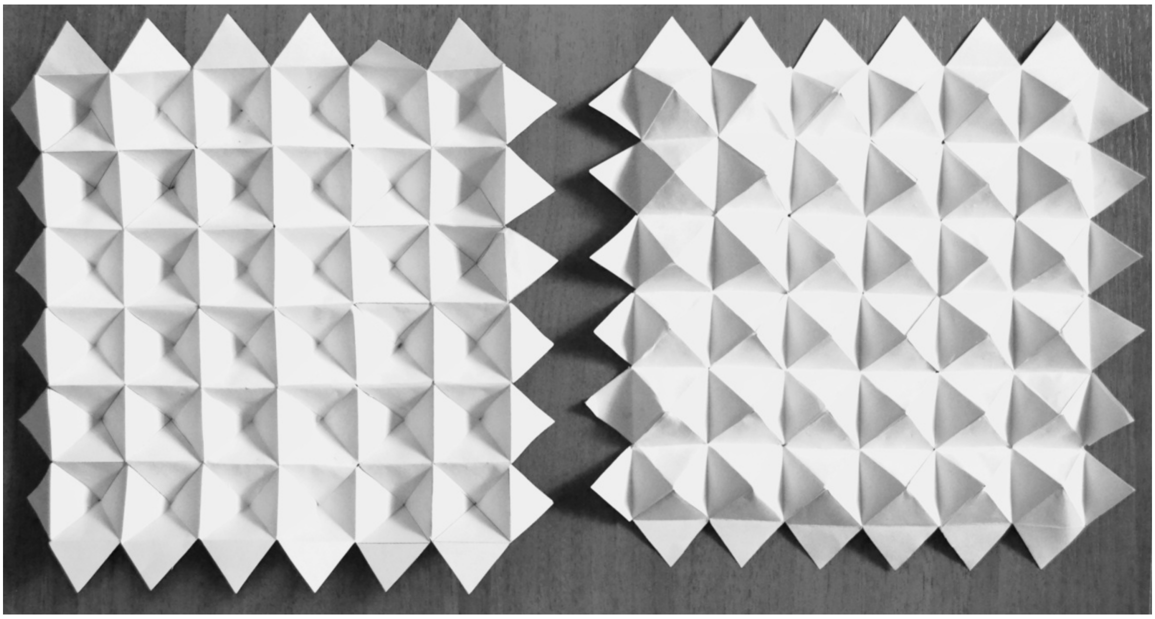

Рис.3. Бумажная модель композиционного материала с плёночной кубической ячейкой

Более сложные контуры, на которые натянуты мыльные плёнки, позволяют предсказать самые лёгкие структуры композитных материалов без решения трудных математических задач [2]. В этих структурах основой является не куб, а другие геометрические фигуры.

Работа доложена, одобрена и награждена дипломом на секции «Перспективные материалы» на Второй Международной школе-конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Биомедицина, материалы и технологии XXI века» в Казанском (Приволжском) федеральном университете 20-23 сентября 2016 года [3].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Физический энциклопедический словарь / Гл. ред. А.М.Прохоров. – М.: Советская энциклопедия, 1983. – 928 с. – Ил. – С.551.

2. Драцкая А.И. Минимальные поверхности 1. – Видеоролик, апрель 2016 г. - Электронный ресурс: https://youtu.be/4i38ltYQ0cw

3. Драцкая А.И., Скворцова А.А. Структуры на основе минимальных поверхностей / II Международная школа конференция студентов, аспирантов и

молодых учёных «Биомедицина, материалы и технологии XXI века», 20-23 сентября 2016. – Казанский (Приволжский) федеральный университет. – Казань: Изд. К(П)ФУ, 2016. (В печати) – Программа: Секция 11 «Перспективные материалы», 22.09.2016, доклад №5. – Электронный ресурс: http://media.wix.com/ugd/14a693_b2c3ef2616904b0e83da5ff924c337a3.pdf