

Свойства тензора скоростей деформации в случайных несжимаемых потокахА.В.Копьев¹, К.П.Зыбин^{1,2}¹Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН²НИУ Высшая школа экономики

В докладе рассматриваются статистические свойства тензора скоростей деформации S_{ij} в различных несжимаемых случайных потоках. Получены точные соотношения, связывающие плотность распределения элементов тензора $f_{S_{ij}}(\sigma_{ij})$ и плотности его различных инвариантов вращения, такие как:

- 1) $f_{\lambda_1\lambda_3}(x, y)$ - совместная плотность распределения максимального и минимального собственных значений тензора скоростей деформации λ_1 и λ_3 .
- 2) $f_{Q_S R_S}(q, r)$ - совместная плотность распределения инвариантов $Q_S = -\frac{1}{2} \text{Tr } S^2$ и $R_S = -\frac{1}{3} \text{Tr } S^3$ [1].
- 3) $f_\beta(z)$ - плотность распределения нормированного промежуточного собственного значения β [2, 3]:

$$\beta = \frac{\sqrt{6}\lambda_2}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}} \quad (1)$$

- 4) $f_s(z)$ - плотность распределения другого безразмерного параметра s [3]:

$$s = \frac{-3\sqrt{6}\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)^{3/2}} \quad (2)$$

Самым важным является соотношение, однозначно и весьма просто выражающее полное (пятимерное) распределение тензора скоростей деформации $f_{S_{ij}}(\sigma_{ij})$ через плотность распределения (двумерную) двух его инвариантов $f_{Q_S R_S}(q, r)$:

$$f_{S_{ij}}(\sigma_{ij}) = \frac{1}{2\pi^2} f_{Q_S R_S}\left(-\frac{1}{2}\sigma_{ij}\sigma_{ji}; -\frac{1}{3}\sigma_{ij}\sigma_{jk}\sigma_{ki}\right) \quad (3)$$

Для его нахождения удобнее всего сначала связать функции $f_{\lambda_1\lambda_3}(x, y)$ и $f_{S_{ij}}(\sigma_{ij})$, для чего был использован следующий якобиан преобразования:

$$\iiint \left\| \frac{\partial(S_{11}; S_{12}; S_{22}; S_{13}; S_{23})}{\partial(\lambda_1; \lambda_3; p_1; p_2; p_3)} \right\| dp_1 dp_2 dp_3 = 2\pi^2 |(\lambda_1 - \lambda_3)(2\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_1 + 2\lambda_3)| \quad (4)$$

, где p_i – это некоторые функции, зависящие от элементов тензора скоростей деформации. Причем конкретный вид этих функций значения не имеет, поскольку по ним производится интегрирование (лишь бы пятерка в знаменателе якобиана была независимой). Отметим, что константа $2\pi^2$ в правой части была определена нами, а вид выражения с точностью до константы известен из теории случайных матриц [4].

Далее требуется более простой якобиан, необходимый для нахождения связи между функциями $f_{\lambda_1\lambda_3}(x, y)$ и $f_{Q_S R_S}(q, r)$:

$$\left\| \frac{\partial(\lambda_1; \lambda_3)}{\partial(Q_S; R_S)} \right\| = \sqrt{-4Q_S^3 - 27R_S^2} \quad (5)$$

Применение формул (4) и (5) после несложных преобразований дает (3).

Заслуживает внимания интегральное преобразование от функции $f_{s_{ij}}(\sigma_{ij})$ к $f_s(z)$ (которую в силу (3) можно выразить через связь с функцией $f_{Q_s R_s}(q, r)$):

$$f_s(z) = \frac{4}{3\sqrt{3}} \int_0^{+\infty} f_{Q_s R_s} \left(-t^2; t^3 \frac{2z}{3\sqrt{3}} \right) t^4 dt \quad (6)$$

Для ее нахождения необходимо упростить следующий интеграл:

$$f_s(z) = \int_{-\infty}^0 dq \int_{-2(-q)^{3/2}/3\sqrt{3}}^{2(-q)^{3/2}/3\sqrt{3}} f_{Q_s R_s}(q; r) \delta \left(z - \frac{3\sqrt{3}r}{2(-q)^{3/2}} \right) dz \quad (7)$$

где функция $f_{Q_s R_s}(q, r)$ сворачивается с дельта-функцией, сосредоточенной на поверхности (об аппарате обобщенных функций см [5]).

Выведенные соотношения позволили аналитически подтвердить численные расчеты Ланда и Роджерса [3] для распределений параметров β и s в гауссовом поле скорости:

$$f_\beta(z) = \frac{3}{4}(1-z^2) \quad (8)$$

$$f_s(z) = \frac{1}{2} \quad (9)$$

Для этого было использовано известное [6] выражение для распределения тензора скоростей деформации в гауссовом поле скорости (с тем же энергетическим спектром, что и в развитом турбулентном потоке):

$$f_{s_{ij}}(\sigma_{ij}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{5}{2\pi \langle \omega^2 \rangle} \right)^{5/2} \exp \left[-\frac{5}{2 \langle \omega^2 \rangle} \text{tr}[\sigma_{ij} \sigma_{ji}] \right] \quad (10)$$

Более того, оказалось, что выражения (8) и (9) справедливы и для любых других обратимых распределений, то есть таких, что:

$$f_{s_{ij}}(\sigma_{ij}) = f_{s_{ij}}(-\sigma_{ij}) \quad (11)$$

Как известно, турбулентное распределение скоростей не обладает свойством обратимости. Привлечение дополнительных феноменологических соображений и численных данных о развитой турбулентности [1] позволило найти двухпараметрическую аппроксимацию распределения тензора скоростей деформации в однородном и изотропном турбулентном потоке, хорошо ложающуюся на экспериментальные и численные данные. Например, как следствие, для распределений параметров β и s получаются следующие однопараметрические аппроксимации:

$$f_\beta(z) = \frac{a(1-a^2)^{2/3}}{(1+a)^{2/3} - (1-a)^{2/3}} \frac{1-z^2}{\left(1 - \frac{a}{2}z(3-z^2)\right)^{5/3}} \quad (12)$$

$$f_s(z) = \frac{2}{3} \frac{a(1-a^2)^{2/3}}{(1+a)^{2/3} - (1-a)^{2/3}} \frac{1}{(1-az)^{5/3}} \quad (13)$$

А для совместной плотности распределения инвариантов Q_S и R_S следующая двухпараметрическая аппроксимация.

$$f_{Q_S R_S}(q, r) = \frac{2}{3} \frac{a(1-a^2)^{2/3}}{(1+a)^{2/3} - (1-a)^{2/3}} \left(\frac{b}{\langle \omega^2 \rangle} \right)^{5/2} \exp \left[-\frac{b}{\langle \omega^2 \rangle} \left((-q)^{3/2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} ar \right)^{2/3} \right] \quad (14)$$

При подгонке численных данных аппроксимацией, параметры аппроксимации определяются с точностью до 6%:

$$a = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad b = \frac{5}{3} \quad (15)$$

Их близость к указанным «точным» значениям возможно имеет универсальный характер, а возможно является случайным совпадением. На рис. 1 приведено сравнение наших результатов и численного счета [3] для функции $f_\beta(z)$ (для примера).

Наконец, на основании выведенных соотношений и имеющихся численных данных строго показано полное отсутствие в турбулентном потоке жидких частиц, расширяющихся осесимметрично («блинообразно»). Ранее эта конфигурация считалась не только возможной, но и наиболее распространенной в турбулентном потоке [3, 7].

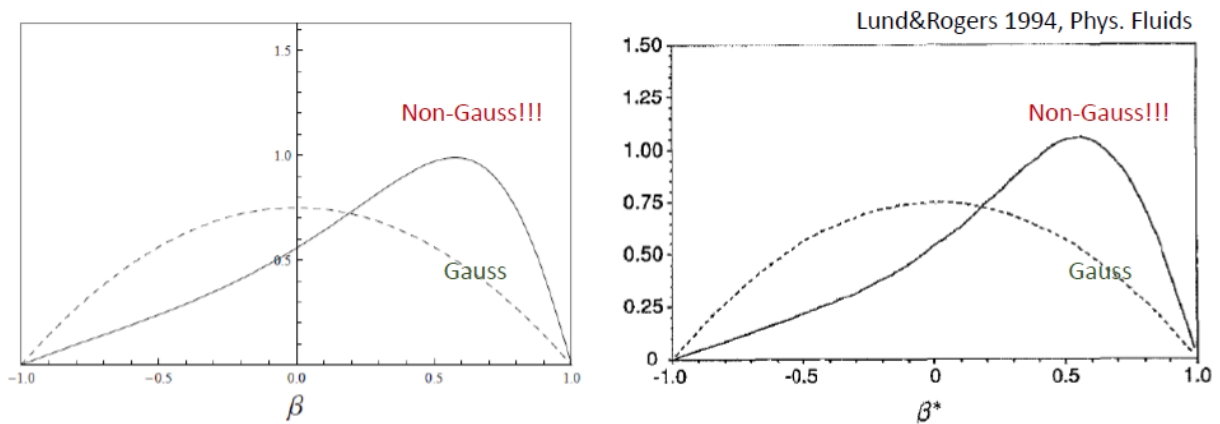


Рис. 1. Сравнение аналитических расчетов для гауссового поля скорости (слева пунктиром) и численного счета [3] для этого же случая (справа пунктиром). Сравнение результатов численного счета [3] для изотропного турбулентного течения (справа сплошной) и его аппроксимации (слева сплошной)

Итак, результатами нашего исследования являются соотношения (3), (4) и (6), точные выражения (8) и (9) для гауссового случая (10) и произвольного обратимого случая (11), а также аппроксимации изотропной турбулентности (12-15) и рис. 1.

Литература.

1. A.Ooi, J. Martin, J. Soria and M.S. Chong, A study of the evolution and characteristics of the invariants of the velocity-gradient tensor in isotropic turbulence // J. Fluid. Mech., 381 (1999), pp. 141-174.
2. Wm.T. Ashurst, A.R. Kerstein, R.M. Kerr and C.H. Gibson, Alignment of vorticity and scalar gradient with strain rate in simulated Navier-Stokes turbulence // Phys.Fluids, 30(8) (1987), pp. 2343-2353.
3. T.S.Lund and M.M.Rogers, An improved measure of strain state probability in turbulent flows // Phys.Fluids, 6(5) (1994), pp. 1839-1847.
4. M.L. Mehta, Random matrices, Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2004.
5. I.M. Gel'fand and G.E. Shilov, Generalized functions. Vol. I: Properties and operations, MA: Academic Press, Boston, 1964.
6. L. Shtilman, M. Spector and A. Tsinober, On some kinematic versus dynamic properties of homogeneous turbulence, J. Fluid Mech., 247 (1993), pp. 65-77.
7. C.Meneveau, Lagrangian Dynamics and Models of the Velocity Gradient Tensor in Turbulent Flows // Annu. Rev. Fluid Mech. 43 (2010), pp. 219-245.