

Оптимизация управления процессом теплопередачи в металлическом стержне

Г.В. Костин^{1,2}, В.С. Тищенко¹

¹Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

²Московский физико-технический институт (государственный университет)

Исследована задача оптимального управления процессом теплопередачи в металлическом стержне, нагреваемом и охлаждаемом при помощи двух элементов Пельтье, присоединенных к его нижней поверхности. Стержень имеет форму вытянутого прямоугольного параллелепипеда, вертикальные стороны которого теплоизолированы, а на верхней грани происходит теплообмен с воздушной средой. Более подробное описание системы управления и соответствующей экспериментальной установки дано в [1, 2].

В рамках одномерной модели теплопроводности задача управления заключается в нахождении закона изменения тепловой мощности для элементов Пельтье $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$, который позволяет за фиксированное время T перевести систему из начального состояния в конечное стационарное состояние и минимизирует целевой функционал J :

$$J[u] = \int_0^T u^T(t)Qu(t)dt \rightarrow \min_{u \in L^2(0,T)}, \tag{1}$$

$$\rho c_p \vartheta_t - \lambda \vartheta_{zz} + h^{-1} \alpha \vartheta = v(t), \quad \vartheta_z(t,0) = \vartheta_z(t,l) = 0, \quad \vartheta_z(0,z) = 0, \tag{2}$$

$$\vartheta(T,z) = \vartheta_s(z), \quad y(T) = y_T \tag{3}$$

$$v(t,z) = \frac{4}{V} (u_1(t) \text{rect} l_s^{-1}(z-z_1) + u_2(t) \text{rect} l_s^{-1}(z-z_5)), \quad V = bhl, \quad l = 4l_s, \tag{4}$$

$$y = (y_1, y_2) = (\vartheta(t, z_3), \vartheta(t, z_7)), \quad z_k = 0.5kl_s, \quad k = 0, \dots, 8. \tag{5}$$

Здесь $\vartheta(t, z)$ – относительная температура стержня в зависимости от времени t и координаты z (см. рис. 1); $v(t, z)$ – кусочно-постоянный по длине стержня удельный приток тепла; b, h, l – ширина, высота и длина стержня; V – его объём, l_s – длина сегментов управления; $Q \in R^{2 \times 2}$ – заданная симметрическая положительно определенная матрица; ρ – объемная плотность, c_p – удельная теплоёмкость, λ – коэффициент теплопроводности, α – коэффициент теплообмена с внешней средой; $y(t)$ – вектор температур в двух заданных точках z_3 и z_7 , где z_k – ряд точек стержня; $\vartheta_s(z)$ – стационарное распределение, к которому асимптотически стремится температура в стержне при постоянном управлении $u(t) = \text{const}$.



Рис. 1. Схематическое изображение управляемой системы.

Для нахождения приближенного решения используется метод разделения переменных Фурье. Функция температуры ищется в конечномерном виде

$$\tilde{\vartheta} = \sum_{i=1}^n \psi_i(z) x_i(t), \quad \psi_1 = \frac{1}{\sqrt{l}}, \quad \psi_{j+1} = \frac{2}{\sqrt{l}} \cos(j\pi l^{-1}z), \quad \langle \psi_j, \psi_k \rangle = \delta_{jk}, \quad j, k \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Система в частных производных (2)–(5) сводится к задаче Коши

$$\dot{x}_j(t) + \nu_j x_j(t) = b_j^T u(t), \quad x_j(0) = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad y(t) = \sum_{i=1}^n c_i x_i(t), \quad \nu_j = \frac{\lambda(j-1)^2 \pi^2}{\rho c_p l^2} + \frac{\alpha}{\rho c_p h}, \quad (7)$$

где $-\nu_j$ – собственные числа системы, а векторные коэффициенты b_j и c_j явно выражаются через ортонормированные собственные функции $\psi_j(z)$.

Далее решается задача оптимального управления (1), (7) с терминальными условиями $y(T) = y_T$. С помощью принципа максимума Понтрягина удается найти оптимальные вектора $u^*(t)$ и $y^*(t)$, как решение однородной линейной системы уравнений порядка $2n$.

На рис. 2 приведены результаты численного моделирования, полученные выбором следующих параметров: размерность приближения $n=4$; компоненты матрицы $Q_{11}=1$, $Q_{12}=-2$, $Q_{22}=36$; время управления $T=1000$ с; терминальные температуры $y_T=(6\text{ К}, 3\text{ К})$, размеры стержня $b=0.04$ м, $h=0.012$ м, $l=0.32$ м; параметры материала $\lambda=110$ Вт/м/К, $\rho=7800$ кг/м³, $c_p=420$ Дж/кг/К, $\alpha=50$ Вт/К/м². Учитываемые собственные числа равны $\nu_1=0.0013\text{ с}^{-1}$, $\nu_2=0.0045\text{ с}^{-1}$, $\nu_3=0.0142\text{ с}^{-1}$, $\nu_4=0.0304\text{ с}^{-1}$.

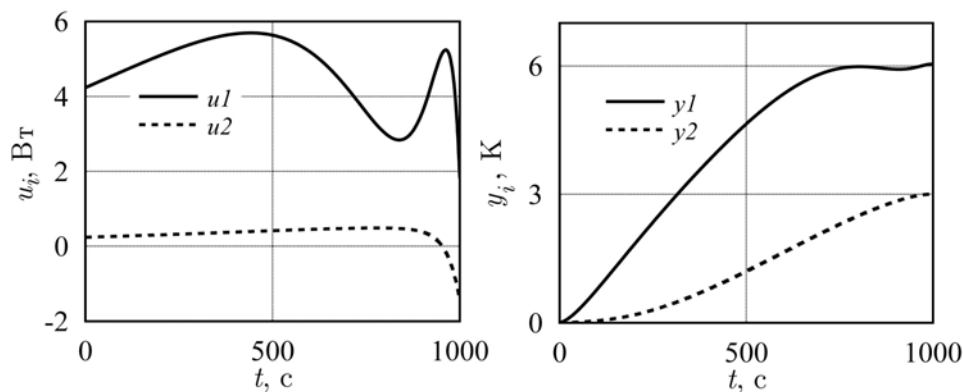


Рис. 2. Компоненты оптимальных векторов управления $u^*(t)$ (слева) и температуры $y(t)$ (справа).

Расчеты, проведенные на более точных приближениях, показали, что для выбранных параметров задачи построенное управление довольно точно приводит систему в заданное терминальное состояние. Добавлением небольшого по амплитуде управления по обратной связи удастся достигнуть более точного приведения системы в желаемое конечное состояние. Предполагается проведение экспериментов для уточнения параметров системы, а также определения точности и эффективности найденных законов нагрева и охлаждения стержня.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (16-01-00138, 15-01-00827, 14-01-00282).

Литература

1. *Aschemann H., Kostin G.V., Rauh A., Saurin V.V.* Approaches to control design and optimization in heat transfer problems // Изв. РАН. ТИСУ. 2010. № 3. С. 40–51.
2. *Rauh A., Senkel L., Aschemann H., Saurin V., Kostin G.* An integrodifferential approach to modeling, control, state estimation and optimization for heat transfer systems // International Journal of Applied Mathematics and Computer Science. 2016. V. 26. N. 1. P. 15–30.