УДК 531

Методика расчета поля давления в плоской и частично заполненной жидкостью трещине гидроразрыва пласта.

И.М. Перепечкин, А.А. Быков
Московский физико-технический институт (государственный университет)

В работе рассматривается плоская трещина ГРП, частично заполненная жидкостью. Возникновение области (лага), в которую не успела дотечь жидкость, связано с тем, что скорость распространения фронта трещины ГРП при её росте составляет порядка скорости звука в твердом теле, а жидкость неспособна распространяться так же быстро. Так же представляется разумным считать давление в лаге известным и постоянным, а вне его известной ширину раскрытия трещины в каждой точке.

Используя теорию, описывающую поле напряжения в полупространстве [1], была получена следующая формула зависимости поля давления от ширины раскрытия трещины [2]:

$$p(x,y) = -\frac{E}{4\pi(1-\nu^2)} \iint_{\Omega} \frac{\Delta h}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}\, dx'\, dy' \qquad (1)$$

где E - модуль Юнга, ν - коэффициент Пуассона, h - раскрытие трещины в каждой точке, Ω - область пространства, занятая трещиной на плоскости Oxy. Вне этой области раскрытие считается равным нулю. Однако при использовании данной формулы для расчета раскрытия трещины в области лага, а затем восстановления поля давления, необходимо решать интегральное уравнение, что при численном расчете требует значительных затрат машинного времени.

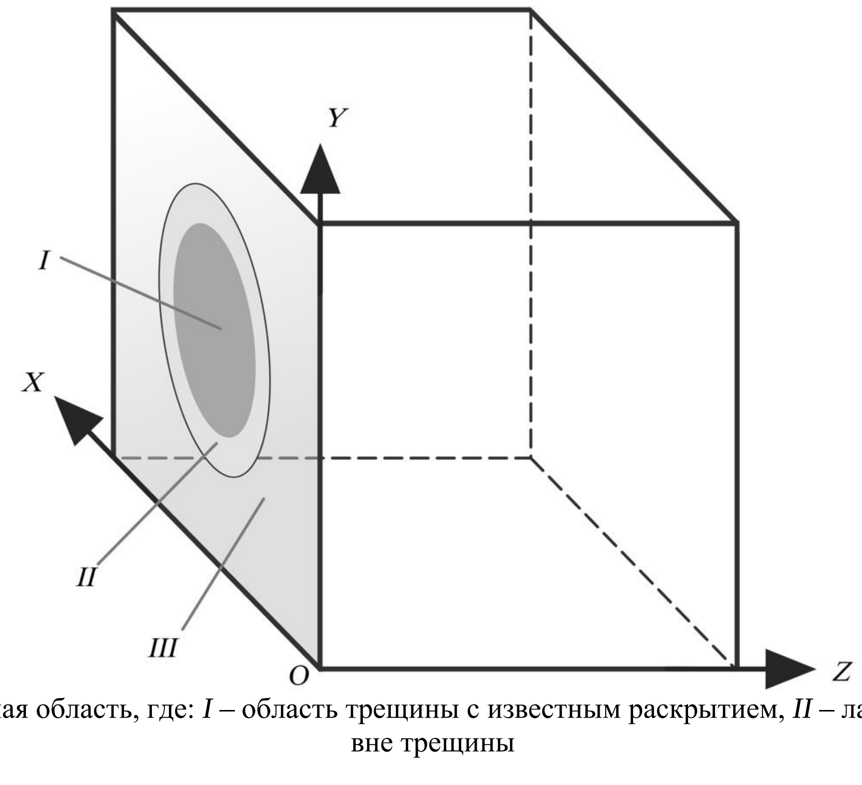

Рис. 1. Расчетная область, где: *I* – область трещины с известным раскрытием, *II* – лаг, *III* – область вне трещины

Можно доопределить функцию *p(x,y)* до трехмерной функции *P(x,y,z)* в пространстве *Oxyz* следующим образом:

$$P(x,y,z) = -\frac{E}{4\pi(1-\nu^2)} \iint_{\Omega} \frac{\Delta_{x'y'} h}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+z^2}}\, dx'\, dy' \qquad (2)$$

При этом функция *P(x,y,z)* будет равной *p(x,y)* на плоскости *z = 0*. Можно заметить, что *P(x,y,z)* представляет из себя решение в общем виде для уравнения Лапласа трехмерном пространстве [3]. Таким образом требуется решить следующую задачу:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}P+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}P+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}P=0 \\
\dfrac{E}{2(1-\nu^2)}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}h+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}h\right)=\dfrac{\partial P}{\partial z},\ z=0 \\
\\
h=h(x,y),\ I \\
P=P_0,\ II \\
h=0,\ III
\end{cases}
\tag{3}
$$

то есть требуется решить уравнение Лапласа в полупространстве со смешанными краевыми условиями. Такая задача решается численно методом конечных разностей значительно быстрее, чем интегральные уравнения, так как для последних матрица коэффициентов системы уравнений не является разреженной.

На рис. 2. показаны срезы численно рассчитанных полей давления вдоль трещины по формуле (1) и при решении задачи (3). Профиль раскрытия трещины был задан эллиптическим, так как для него существует аналитическое решение, предсказывающее постоянное давление по всех поверхности [4]. В случае расчета по формуле 1 задавалось раскрытие на всей поверхности трещины. Во втором случае давление в лаге задавалось равным теоретической оценке, а раскрытие вне лага задавалось равным таковому в эллиптической трещине. На рисунке видно, что указанные зависимости давления от координат совпадают, а также разрешается его сингулярное поведение края трещины. Последнее позволяет в дальнейшем определить коэффициент интенсивности напряжений в каждой точке фронта трещины.

Преимуществом предложенной методики, состоящей в решении уравнения (3) методом конечных элементов, в сравнении с решением интегрального уравнения является снижение вычислительой сложности алгоритма. Работоспособность методики показана на тестовых задачах.

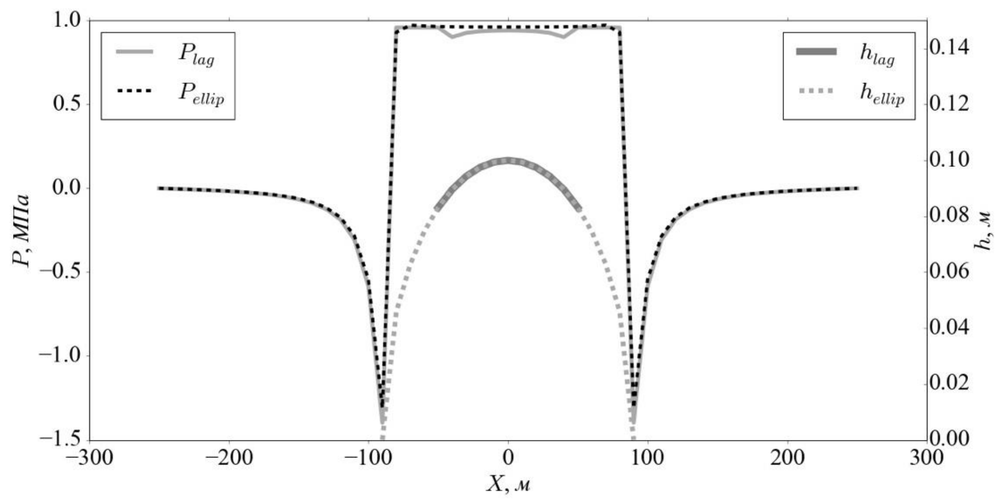

Рис. 2. Результаты расчета давления в эллиптически раскрытой трещине и в трещине с лагом при E = 1E+2 Мпа, ν= 0.3.

Литература:

1. *Panasyuk V.V.* Strength and Fracture of Solids with Cracks.: National Academy of Sciences of Ukraine, Lviv, 2002.
2. *Atroshchenko E.* Stress Intensity Factors for Elliptical and Semi-Elliptical cracks subjected to an arbitrary mode I loading.: Waterloo, Ontario, Canada 2010.
3. *Уроев В.М.* Уравнения математической физики. М.: ИФ «ЯУЗА». 1998. 373 с.
4. *Martin P.A.* On wrinkled penny-shaped cracks // Journal of Mechanics and Physics of Solids 2001. V. 49. P. 1481–1495.