УДК 519.175.4

Вероятности монадических свойств случайного графа Эрдеша-Реньи

М.Е. Жуковский[1]

[1]Московский физико-технический институт (государственный университет)

В 1969 году Ю.В. Глебским, Д.И. Коганом, М.И. Лиогонького и В.А. Талановым был доказан закон нуля или единицы для всех свойств первого порядка случайного графа Эрдеша-Реньи в случае медленно убывающей (растущей) вероятности появления ребра. В 1988 году Дж. Спенсер и С. Шелах [1] уточнили результат, доказав, что закон выполнен и для степенной функции с иррациональным отрицательным показателем. Кроме того, было доказано, что при рациональном показателе из интервала [-1,0) случайный граф не подчиняется закону нуля или единицы. Если показатель меньше -1, то закон выполнен и при многих рациональных значениях. В случае формул второго порядка настолько красивую теорию построить не удается. Уже для вероятности ребра, равной 1/2, удается построить пример монадического свойства (т.е. записанного с помощью монадической формулы, в которой разрешается ставить кванторы только по вершинам и унарным предикатам), вероятность которого не стремится ни к 0, ни к 1. Соответствующий пример приведен в работе М. Кауфманна и С. Шелаха 1985 года. В случае вероятности проведения ребра, являющейся степенной функцией от числа вершин графа, в [2] доказано, что граф Эрдеша-Реньи не подчиняется закону нуля или единицы ни при каких значениях показателя, лежащих в интервале [-1,0). Если показатель меньше -1, то закон для монадических свойств выполнен тогда и только тогда, когда выполнен закон для свойств первого порядка. Легко видеть, что, если разрешить кванторы по предикатам арности хотя бы 2, то для любой вероятности проведения ребра (независимо от того, является ли эта вероятность константой или функцией от числа вершин графа) закон нуля или единицы не будет выполнен.

Спектром свойства называется множество таких чисел, для которых случайный граф с вероятностью проведения ребра, равной степенной функции от числа вершин графа с данным показателем, обладает этим свойством, не стремится ни к нулю, ни к единице. В 1990 году Дж. Спенсер доказал [3], что существует свойство первого порядка с бесконечным спектром. В [4] нам удалось доказать, что наименьшая кванторная глубина формулы первого порядка, записывающей свойство с бесконечным спектром, равна либо 4, либо 5. Вопрос о том, чему же в точности равна эта наименьшая глубина, остается открытым.

В докладе будет рассказано о новом результате, полученном в совместно работе с А.Б. Купавским. Нам удалось доказать, что наименьшая кванторная глубина монадической формулы, записывающей свойство с бесконечным спектром, равна 4.

Литература

1. *Shelah S. [et al.]* Zero-one laws for sparse random graphs // J. Amer. Math. Soc. – 1988. – V. 1. – P. 97–115.
2. *Tyszkiewicz J.* On Asymptotic Probabilities of Monadic Second Order Properties // Lecture Notes in Computer Science. – 1993. – V. 702. – P. 425–439.
3. *Spencer J.H.* Infinite spectra in the first order theory of graphs // Combinatorica. – 1990. – V. 10, N 1. – P. 95–102.
4. *Жуковский М.Е.* Спектры формул малой кванторной глубины // Успехи математических наук. – 2015. – Т. 70, № 6. – С. 209–210.

Работа поддержана грантами РФФИ N 15-01-03530 и N 16-31-60052.