УДК 533.6.011

О НЕОБХОДИМЫХ И ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ ВЫСОКОСКОРОСТНОЙ ПОСТУПАТЕЛЬНОЙ НЕРАВНОВЕСНОСТИ УДАРНО-СЖАТОЙ СМЕСИ ГАЗОВ

М.М.Кузнецов, С.В.Матвеев, Е.В.Молоствин, Ю.Г.Решетникова, Л.В.Смотрова

Работа посвящена аналитическому исследованию эффекта высокоскоростной поступательной неравновесности в сильных ударных волнах, когда относительная скорость молекул, сталкивающихся внутри фронта ударной волны, значительно превосходит по величине скорость звука в газовом потоке перед волной. Несмотря на протекшие три десятилетия с начала исследования этого эффекта (в основном численных), в его понимании остается все еще много невыясненных вопросов, в разрешении которых свою полезную роль может сыграть аналитическая бимодальная модель ударной волны. С точки зрения практических приложений наибольший интерес представляет исследование т.н. высокопороговой, высокоскоростной поступательной неравновесности, возникающей при протекании неравновесных химических реакций с высокими энергиями активации в сильно сжатых газовых смесях. Эффект высокоскоростной поступательной неравновесности в ударно сжатой смеси газов был установлен ранее в численных исследованиях структуры ударных волн методом статистического моделирования Монте-Карло [1].

Однако и при рассмотрении структуры сильных ударных волн в однокомпонентных, многоатомных газах с неупругими столкновениями можно, как оказалось, установить существенное, четко определенное свойство высокоскоростной поступательной неравновесности, с необходимостью следующее из аналитической бимодальной модели ударной волны. Это свойство, по-видимому, сводится к тому, что в высокоскоростном «хвосте» бимодальной Тамм-Мотт-Смитовской функции распределения пар молекул, известный ранее [1] эффект «перехлеста», т.е. преобладания числа Nneq высокоскоростных пар внутри фронта волны над числом Neq в поступательно равновесной зоне за фронтом, имеет строгий максимум по величине Nneq / Neq, зависящий от степени сжатия в сильной ударной волне [2].

В данной работе показано, что эффект «перехлеста» в эволюции функции распределения пар молекул компонентов бинарной смеси газов внутри фронта ударной волны может быть рассмотрен также аналитически.

1. Теоремы о необходимых и достаточных условиях эффекта «перехлеста» в эволюции функции распределения пар молекул однокомпонентного газа внутри фронта ударной волны

Воспользуемся аппроксимацией Тамма-Мотт-Смита для одночастичной функции распределения *F(b,c)* и функции распределения пар молекул $G(\overline{g},b)$, следуя работе [3].

$$F(b,\tilde{n}) = \left\{(1-b)n_0F_0(c) + bn_1F_1(c)\right\}\left[(1-b)n_0 + bn_1\right]^{-1} \qquad (1)$$

Здесь F_0, F_1 - «холодное» и «горячее» распределения перед и за волной;

$$F_i(c) = \left(\frac{m}{2\pi kT_i}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{m(c-u_i)^2}{2kT_i}\right] \qquad (2)$$

m – масса молекулы; u_i, T_i, n_i – скорости, температуры и концентрации газового потока перед (i=0) и за (i=1) волной, k - постоянная Больцмана, (c-u_i) - собственная скорость молекулы, коэффициент b задавался параметрически в интервале $0 \le b \le 1$ при прохождении газа через фронт ударной волны [3].

Величина относительной функции распределения $G(\overline{g},b)$ пар молекул имеет вид:

$$\tilde{G}=\left[(1-b)^2\varepsilon_0^2\tilde{G}_0+b^2+2b(1-b)\varepsilon_0\tilde{G}_{01}\right]\cdot\left[\varepsilon_0+(1-\varepsilon_0)b\right]^{-2} \quad (3)$$

где $G=\dfrac{G}{G_1}$, $G_0=\dfrac{G_0}{G_1}$, $G_1=1$, $G_{01}=\dfrac{G_{01}}{G_1}$, G_0, G_1, G_{01} - соответственно «холодная» (перед волной), «горячая» (за волной) и «перекрестная» моды распределений.

Распределения G_0 и G_1 являются максвелловскими функциями по относительным скоростям g :

$$G_i(g)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{kT_i}\right)^{3/2}g^2\exp\left[-\frac{mg^2}{4kT_i}\right] \quad (4)$$

Перекрестная мода имеет вид [3]:

$$G_{01}(g)=\left[\frac{m}{2\pi k(T_0+T_1)}\right]^{3/2}\frac{g}{u}\left\{\exp\left[-\frac{m(g-u)^2}{2k(T_0+T_1)}\right]-\exp\left[-\frac{m(g+u)^2}{(T_0+T_1)}\right]\right\} \quad (5)$$

Макроскопические параметры, входящие в соотношения (1) - (3), связаны законами сохранения потоков массы, импульса и энергии в сечениях i = 0 (перед волной) и i = 1 (за волной):

$$\frac{T_1}{T_0}=1+m_0(1-\varepsilon_0^2)$$

$$\frac{n_0}{n_1}=\frac{u_1}{u_0}=\varepsilon_0=\varepsilon(1+m_0^{-1})$$

$$u=u_0-u_1=u_0(1-\varepsilon_0)$$

Здесь $m_0=\varepsilon(1-\varepsilon)^{-1}M_0^2$, $\varepsilon=\dfrac{\gamma-1}{\gamma+1}$, γ - отношение удельных теплоемкостей при постоянном давлении c_p и объеме c_v , $\gamma=\dfrac{c_p}{c_v}=(1+\varepsilon)(1-\varepsilon)^{-1}$, M_0 - число Маха перед волной, $M_0=\dfrac{u_0}{a_0}$, a_0 - скорость звука перед волной, $a_0=\sqrt{\dfrac{\gamma kT_0}{m}}$.

Выражение (3) позволяет сформулировать следующие теоремы о «перехлесте» сверхскоростной поступательной неравновесности в бимодальной ударной волне. [4]

Теорема 1. Для сверхскоростного превышения («перехлеста», $\tilde{G}_{\max}>1$) величины поступательно неравновесной функции распределения пар молекул внутри фронта ударной волны над соответствующей равновесной величиной за волной *необходимо , чтобы величина перекрестной моды* $\tilde{G}_{01}$ *удовлетворяла соотношению*

$$2\tilde{G}_{01}>1+\tilde{G}_0 \quad (6)$$

и достаточно, чтобы величина этой моды была больше единицы

$$\tilde{G}_{01} > 1 \qquad (7)$$

Теорема 2. Величина сверхскоростного превышения ($\tilde{G}_{\max} > 1$) в бимодальном однокомпонентном газе при выполнении соотношения (4) достигает своего максимального значения

$$\tilde{G} = \tilde{G}_{\max} = (\tilde{G}_{01}^2 - \tilde{G}_0) \Big/ \left(2\tilde{G}_{01} - 1 - \tilde{G}_0\right) \qquad (8)$$

Доказательство теорем 1- 2 : перейдем к переменной

$$\chi = \frac{(1-b)\varepsilon_0}{\varepsilon_0 + (1-\varepsilon_0)b}, \qquad (9)$$

причем $0 \le \chi \le 1$ при $0 \le b \le 1$

Одночастичная функция распределения по собственным «тепловым» скоростям молекул (1) и функция распределения пар молекул по их относительным скоростям (3), записанные через переменную (9), примут соответственно вид :

$$F(\chi, c) = \chi F_0(c) + (1-\chi)F_1(c) \qquad (10)$$

$$\tilde{G} = \chi^2 \tilde{G}_0 + 2\chi(1-\chi)\tilde{G}_{01} + (1-\chi)^2 \qquad (11)$$

Тогда на основании соотношений (10)-(11) для функции $\tilde{G}$ можно записать:

$$(\tilde{G} - 1) + \chi(1 - \tilde{G}_0) = (\chi - \chi^2)(2\tilde{G}_{01} - 1 - \tilde{G}_0), \qquad (12)$$

Или

$$\left(\tilde{G} - 1\right) = \chi\left(2\tilde{G}_{01} - 1 - \tilde{G}_0\right)\left(\chi_b - \chi\right), \qquad (13)$$

Где

$$0 \le \chi \le 1\ , \quad \chi_b = 2\left(\tilde{G}_{01} - 1\right)\left(2\tilde{G}_{01} - 1 - \tilde{G}_0\right)^{-1} \qquad (14)$$

В итоге при $(\tilde{G} - 1) > 0$ из соотношений (12)-(13) следует выполнение необходимого неравенства $(2\tilde{G}_{01} - 1 - \tilde{G}_0) > 0$, поскольку функция $\tilde{G}_0$ всегда меньше 1 и $0 \le \chi \le 1$.

И, наоборот, неравенство $(\tilde{G} - 1) > 0$ следует из соотношений (13)-(14) при выполнении достаточного условия теоремы 1.

Максимальное значение величины $(\tilde{G} - 1)_{\max}$ достигается при $\chi = \frac{\chi_b}{2}$ т.к. при этом значении величины χ на основании соотношений (13) и (14) выполняются обычные условия максимума функции одной переменной $\tilde{G} = \tilde{G}(\chi)$:

$$\frac{d\tilde{G}}{d\chi}\Big|_{\chi_b/2}=0,\ \frac{d^2\tilde{G}}{d\chi^2}\Big|_{\chi_b/2}=-2(2\tilde{G}_{01}-1-\tilde{G}_0)<0$$

Для представления о том, как выполняется неравенство (7), рассмотрим асимптотический гиперзвуковой предельный переход в параметрах функции распределения пар молекул (3).

$$M_0 \gg 1,\ (M_0 \to \infty)$$

$$m_0 \equiv \frac{\gamma-1}{2}M_0^2=\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}M_0^2 \gg 1,\ \ (m_0 \to \infty)$$

Физически этот предельный переход соответствует случаю бесконечно сильной гиперзвуковой ударной волны, когда $M_0 \to \infty,\ \frac{T_0}{T_1} \to 0$.

В результате для выражений, входящих в формулы (2)-(3) получим

$$\frac{n_0}{n_1}=\frac{u_1}{u_0}\to\varepsilon\,,$$

$$u \to u_0(1-\varepsilon)\,,$$

$$G_0 \to m_0^{3/2}\exp\left(-\frac{\gamma M_0^2}{4}g^{-2}\right),$$

$$\tilde{G}_{01}\to\sqrt{2}\varepsilon(1-\varepsilon)\bar{g}^{-1}\left\{1-\exp\left[\frac{-2g}{\varepsilon(1-\varepsilon)}\right]\right\}\exp\left[\frac{2-(\bar{g}-2)^2}{4\varepsilon(1-\varepsilon)}\right]$$

Применение асимптотического гиперзвукового предельного перехода позволяет получить простое аналитическое выражение для величины высокоскоростного «перехлеста» функции пар молекул

$$G_{*,\max}=\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}e^{\frac{1}{2\varepsilon}}\ , \qquad (15)$$

Где $\varepsilon=\frac{\rho_0}{\rho_1}$, ε^{-1} - степень сжатия в волне.

Значения этой функции приведены в таблице

Таблица 1.

Максимум "перехлеста" G_{max} в сверхзвуковом потоке

Gas	A	(A_2) без возбуждения колебаний	(A_2) с возбуждением колебаний	(A_3) Нелинейная молекула	Равновесный диссоциирующий воздух	Многоатомно C_8H_{16}

γ	5/3	7/5	9/7	7/6	11/10	22/21
ε	1/4	1/6	1/8	1/13	1/21	1/43
$\tilde{G}_{*,\max}$	1.31	2.37	4.84	36/28	1226	3.6·108

В этой таблице величина ε задавалась в качестве параметра для случаев молекул газов с различным количеством атомов: одноатомных (A), двухатомных (A_2), трехатомных (A_3), многоатомных (типа C_8H_{16}). В ней также учтен случай равновесного диссоциирующего воздуха с эффективным значением параметра $\varepsilon = \varepsilon_e = \dfrac{1}{21}$ $\left(\gamma = \gamma_e = \dfrac{h}{e} = 1,1\right)$ за скачком уплотнения [5] и, кроме того, рассмотрены отдельно случаи $\varepsilon = \dfrac{1}{6}$ (γ=1,4) и $\varepsilon = \dfrac{1}{8}$ $\left(\gamma = \dfrac{9}{7}\right)$, соответствующие отсутствию или наличию возбужденных колебательных степеней свободы у двухатомных газов (A_2).

Из формулы (13) и таблицы 1 следует, что в однокомпонентном (простом) газе эффект высокоскоростной поступательной неравновесности ($\tilde{G} > 1$) сильно зависит от числа внутренних степеней свободы молекул, непосредственно влияющего на величину сжатия в ударной волне ε^{-1}

В случаи бинарной смеси газов, с различными, в общем случае, концентрациями n_γ и массами m_γ молекул $(\gamma = \alpha, \beta)$ бимодальное распределение $F(b,c)$,записанное для каждого сорта молекул γ, можно представить в следующем виде

$$F^{(\gamma)} = n\chi\eta_0 F_0^{(\gamma)} + n(1-\chi)\eta_1 F_1^{(\gamma)} \tag{16}$$

Здесь

$$n = \sum_{(\gamma)} n_0^{(\gamma)} + \sum_{(\gamma)} n_1^{(\gamma)}, \quad \chi = \sum_{(\gamma)} n_0^{(\gamma)} \Big/ n, \quad \eta_0^{(\gamma)} = n^{(\gamma)} \Big/ \sum_{(\gamma)} n_0^{(\gamma)}, \quad \eta_1^{(\gamma)} = n^{(\gamma)} \Big/ \sum_{(\gamma)} n_1^{(\gamma)} \tag{17}$$

Функция распределения пар молекул $G^{(\alpha,\beta)}$, вычисленная аналогично функции (3) на основе соотношения (14), может быть записана как и в однокомпонентном (простом) газе, в форме полинома второй степени по переменной χ:

$$G^{(\alpha,\beta)} = \chi^2 Q_0^{(\alpha,\beta)} + 2\chi(1-\chi)\left[(Q_{01}^{(\alpha,\beta)} + Q_{10}^{(\alpha,\beta)})\right] + (1-\chi)^2 Q_1^{(\alpha,\beta)} \tag{18}$$

$$Q_0^{(\alpha,\beta)} = n^2\eta_0^{(\alpha)}\eta_0^{(\beta)}G_0^{(\alpha,\beta)};\ Q_1^{(\alpha,\beta)} = n^2\eta_1^{(\alpha)}\eta_1^{(\beta)}G_1^{(\alpha,\beta)};\ Q_{01}^{(\alpha,\beta)} = (n^2/2)\eta_0^{(\alpha)}\eta_1^{(\beta)}G_{01}^{(\alpha,\beta)};$$

$$Q_{10}^{(\alpha,\beta)} = (n^2/2)\eta_1^{(\alpha)}\eta_0^{(\beta)}G_{10}^{(\alpha,\beta)}$$

Функции $G_0^{(\alpha,\beta)}$, $G_1^{(\alpha,\beta)}$, $G_{01}^{(\alpha,\beta)}$, $G_{10}^{(\alpha,\beta)}$ совпадают в простом газе с функциями G_0, G_1, G_{01}, G_{10} при $\alpha = \beta$.

Выражение (18) позволяет исследовать на экстремум (максимум) функцию пар молекул (18) отнесенную к поступательно равновесному значению этой функции за ударной волной

$$\tilde{G}^{(\alpha,\beta)} = G^{(\alpha,\beta)} \Big/ G_1^{(\alpha,\beta)}$$

Соотношения (17) –(18) оказываются эффективными в случае бинарной смеси газов с несильно отличающимися отношениями масс и концентраций обоих компонентов:

$$1 < m_\alpha / m_\beta < 2, \qquad 1 < n_\alpha / n_\beta < 2 \qquad (19)$$

Окончательная количественная формулировка результатов для смеси газов, аналогичная таблице 1 для однокомпонентного газа, требует для своей реализации применения численных методов. Связано это с тем, что парциальные температуры и макроскопические скорости газа в дозвуковых «крыльях» бимодальных распределений по скоростям молекул оказываются в случае смеси газов, в отличие от однокомпонентного газа, принципиально переменными, а не постоянными [6].

Численные исследования эффекта «перехлеста» в бинарной смеси газов, проведенные ранее в работах [1;6], показали, что наиболее существенным он становится в случае выполнения неравенств, более сильных, чем (19):

$$m_\alpha / m_\beta < 1/10, \qquad n_\alpha / n_\beta > 100 \qquad (20)$$

где величины с индексом α относятся к легкому газу, а с индексом β – к тяжелому.

Функции распределения пар компонент $G^{(\alpha,\beta)}$ при $\beta = \alpha$ (легкого компонента) и при $\beta \neq \alpha$ (легкого – тяжелого) обнаруживают при своей эволюции внутри фронта ударной волны эффект высокоскоростного «перехлеста», количественно близкий к соответствующему эффекту в однокомпонентном газе. Наиболее сильный эффект наблюдается для функции $G^{(\alpha,\beta)}$ при $\alpha = \beta$ (тяжелого компонента).

Можно показать, анализируя соотношения (19) – (20), что усиление эффекта «перехлеста» у тяжелого компонента связано с тем, что мода $G_{01}^{(\alpha,\beta)}$ содержит в показателе экспоненты отношение массы тяжелого компонента к равновесной температуре газа за ударной волной, определяемой в силу соотношений (20) преобладанием легкого компонента в смеси газов [7]

2. Необходимые и достаточные условия эффекта высокоскоростного перехлеста в бинарной смеси газов.

Теоремы 1-2 допускают обобщение на случай бинарной смеси газов, с различными, в общем случае, концентрациями n_γ и массами m_γ молекул $(\gamma = \alpha, \beta)$.

В этом случае бимодальное распределение, записанное для каждого сорта молекул $\gamma = \alpha, \beta$, можно представить в следующем виде

$$F^{(\gamma)} = \chi^{(\gamma)} F_0^{(\gamma)} + (1 - \chi^{(\gamma)}) F_1^{(\gamma)} \qquad (21)$$

Где $$\chi^{(\gamma)} = \frac{n_0^{(\gamma)}}{n_0^{(\gamma)} + n_1^{(\gamma)}},$$

причем концентрации

$n_0^{(\gamma)}$, $n_1^{(\gamma)}$

являются , как и в простом газе ($\alpha=\beta$), функциями переменной x , т.е. меняется по ширине ударной волны.

Весовые множители

$$F_0^{(\gamma)}, F_1^{(\gamma)}$$

входящие в формулу (21), в отличие от их более простых аналогов в простом газе (1)-(2), являются в смеси газов в общем случае также функциями переменной x как и концентрации [6]. Это и представляет главную сложность при выводе необходимых и достаточных условий высокоскоростной поступательной неравновесности в смеси газов.

Функции распределения пар молекул $G^{(\alpha,\beta)}$, обобщающие соответствующие функции для (10)-(11) простого газа примут вид:

$$G^{(\alpha,\beta)} = \chi^{(\alpha)}\chi^{(\beta)}G_0^{(\alpha,\beta)} + \chi^{(\alpha)}(1-\chi^{(\beta)})G_{01}^{(\alpha,\beta)} + (1-\chi^{(\alpha)})\chi^{(\beta)}G_{10}^{(\alpha,\beta)} + (1-\chi^{(\alpha)})(1-\chi^{(\beta)})G_1^{(\alpha,\beta)} \tag{22}$$

Раскроем скобки в соотношении (22):

$$G^{(\alpha,\beta)} = \chi^{(\alpha)}\chi^{(\beta)}G^{(\alpha,\beta)} + (\chi^{(\alpha)} - \chi^{(\alpha)}\chi^{(\beta)})G_{01}^{(\alpha,\beta)} + (\chi^{(\beta)} - \chi^{(\beta)}\chi^{(\alpha)})G_{10}^{(\alpha,\beta)}$$

$$+G_1^{(\alpha,\beta)} - \chi^{(\beta)}G_1^{(\alpha,\beta)} + \chi^{(\alpha)}G_1^{(\alpha,\beta)} + \chi^{(\alpha)}\chi^{(\beta)}G_1^{(\alpha,\beta)} \tag{23}$$

Необходимые условия высокоскоростного перехлеста $(\tilde{G} > 1)$

Преобразуем соотношение (23), стремясь выделить множитель

$$(\chi^{(\alpha)} + \chi^{(\beta)} - \chi^{(\alpha)}\chi^{(\beta)})G_{ij} \tag{24}$$

где каждый индекс i, j принимает попеременно значения 0 и 1. Тогда получим

$$(G^{(\alpha,\beta)} - G_1^{(\alpha,\beta)}) + \chi^{(\beta)}(G_{01}^{(\alpha,\beta)} - G_0^{(\alpha,\beta)}) + \chi^{(\alpha)}(G_{01}^{(\alpha,\beta)} - G_0^{(\alpha,\beta)}) =$$

$$= (\chi^{(\alpha)} + \chi^{(\beta)} - \chi^{(\alpha)}\chi^{(\beta)})(G_{01}^{(\alpha,\beta)} + G_{10}^{(\alpha,\beta)} - G_1^{(\alpha,\beta)} - G_0^{(\alpha,\beta)}) \tag{25}$$

Покажем, что выделенный множитель (24) в правой части равенства (25) всегда будет положительно определенным.

С этой целью воспользуемся известным неравенством

$$\frac{\chi^{(\alpha)} + \chi^{(\beta)}}{2} \geq \sqrt{\chi^{(\alpha)}\chi^{(\beta)}} , \tag{26}$$

выражающим тот факт, что среднее арифметическое больше среднего геометрического при $\chi^{(\alpha)} \neq \chi^{(\beta)}$ (смесь) или равно при $\chi^{(\alpha)} = \chi^{(\beta)}$ (простой газ) [9] .

Т.о.

$$\frac{\chi^{(\alpha)}+\chi^{(\beta)}}{2} \ge \frac{2\chi^{(\alpha)}\chi^{(\beta)}}{\chi^{(\alpha)}+\chi^{(\beta)}}$$, отсюда $$\frac{1}{4} \ge \frac{\chi^{(\alpha)}\chi^{(\beta)}}{(\chi^{(\alpha)}+\chi^{(\beta)})^2}$$

Тогда

$$\chi^{(\alpha)}+\chi^{(\beta)}-\chi^{(\alpha)}\chi^{(\beta)} = (\chi^{(\alpha)}+\chi^{(\beta)})(1-\frac{\chi^{(\alpha)}\chi^{(\beta)}}{\chi^{(\alpha)}+\chi^{(\beta)}}) =$$

$$= (\chi^{(\alpha)}+\chi^{(\beta)})(1-\frac{\chi^{(\alpha)}\chi^{(\beta)}}{(\chi^{(\alpha)}+\chi^{(\beta)})^2}(\chi^{(\alpha)}+\chi^{(\beta)}) \ge (\chi^{(\alpha)}+\chi^{(\beta)})(1-\frac{1}{4}(\chi^{(\alpha)}+\chi^{(\beta)})) > 0$$

,ч.т.д.

Для получения искомых необходимых условий, осталось проанализировать знаки выражений , стоящих в скобках левой и правой части равенства (25).

Положительность первой скобки в левой части равенства (25) является заданной при поиске необходимых условий. Положительность второй и третьей скобок всегда выполняется в простом газе , а в смеси газов следует из того, что эффективные температуры [9]

$$T_{01}^{ý} = \frac{m_\alpha T_0^{(\beta)} + m_\beta T_1^{(\alpha)}}{m_\alpha + m_\beta} \tag{27}$$

$$T_{10}^{ý} = \frac{m_\alpha T_1^{(\beta)} + m_\beta T_0^{(\alpha)}}{m_\alpha + m_\beta} \tag{28}$$

от которой зависят соответственно перекрестные моды $G_{01}^{(\alpha,\beta)}$, $G_{10}^{(\alpha,\beta)}$ [10], больше эффективной температуры

$$T_0^{ý} = \frac{m_\alpha T_0^{(\beta)} + m_\beta T_0^{(\alpha)}}{m_\alpha + m_\beta} \quad , \tag{29}$$

от которой зависит мода $G_0^{(\alpha,\beta)}$ в холодном крыле функции распределения пар молекул $G^{(\alpha,\beta)}$.

С учетом положительности выражения (24), получим в итоге искомые необходимые условия эффекта перехлеста из правой части соотношения (25):

$$(G_{01}^{(\alpha,\beta)} + G_{10}^{(\alpha,\beta)} - G_1^{(\alpha,\beta)} - G_0^{(\alpha,\beta)}) > 0 \tag{30}$$

В случае простого газа, когда

$G_{01}^{(\alpha,\beta)} + G_{10}^{(\alpha,\beta)} = 2G_{01} = 2G_{10}$,

$G_1^{(\alpha,\beta)} = G_1$

$G_0^{(\alpha,\beta)} = G_0$

из выражения (30) будет следовать установленное ранее необходимое условие эффекта перехлеста (6).

Достаточные условия высокоскоростного перехлеста $(\tilde{G} > 1)$

Введем в соотношения (22) переменные

$$\chi = \chi^{(\alpha)} + \chi^{(\beta)} \tag{31}$$

$$\eta^{(\alpha)} = \frac{\chi^{(\alpha)}}{\chi^{(\alpha)} + \chi^{(\beta)}}, \tag{32}$$

Для случая простого газа переменная (31) будет совпадать с переменной (9), а переменная (32) становится числом , равным 1.

Тогда

$$(G^{(\alpha,\beta)} - G_1^{(\alpha,\beta)}) + (1-\eta^{(\alpha)})\chi(G_{01}^{(\alpha,\beta)} - G_0^{(\alpha,\beta)}) + \eta^{(\alpha)}(G_{10}^{(\alpha,\beta)} - G_0^{(\alpha,\beta)})\chi =$$
$$(\chi - \eta^{(\alpha)}(1-\eta^{(\alpha)})\chi^2(G_{01}^{(\alpha,\beta)} + G_{10}^{(\alpha,\beta)} - G_1^{(\alpha,\beta)} - G_0^{(\alpha,\beta)}) \tag{33}$$

Отсюда

$$(G^{(\alpha,\beta)} - G_1^{(\alpha,\beta)}) = \chi\Big[(1-\eta^{(\alpha)}(1-\eta^{(\alpha)})\chi)(G_{01}^{(\alpha,\beta)} + G_{10}^{(\alpha,\beta)} - G_1^{(\alpha,\beta)} - G_0^{(\alpha,\beta)}) -$$
$$-(1-\eta^{(\alpha)})(G_{01}^{(\alpha,\beta)} - G_0^{(\alpha,\beta)}) - \eta^{(\alpha)}\left(G_{01}^{(\alpha,\beta)} - G_0^{(\alpha,\beta)}\right)\Big] \tag{34}$$

Введем функцию $\chi^{(\hat{a})}$, определяемую из соотношения:

$$\left[1-\eta^{(\alpha)}(1-\eta^{(\alpha)})\chi^{(b)}\right](G_{01}^{(\alpha,\beta)} + G_{10}^{(\alpha,\beta)} - G_1^{(\alpha,\beta)} - G_0^{(\alpha,\beta)}) -$$
$$-(1-\eta^{(\alpha)})(G_{01}^{(\alpha,\beta)} - G_0^{(\alpha,\beta)}) - \eta^{(\alpha)}\left(G_{01}^{(\alpha,\beta)} - G_0^{(\alpha,\beta)}\right) = 0, \tag{35}$$

Соответствуещее граничному значению переменной $\chi = \chi^{(\hat{a})}$, при котором эффект перехлеста обращается в нуль внутри ударной волны.

Из соотношения (35) найдем величину $\chi^{(\hat{a})}$

$$\chi^{(b)}=\frac{G_{01}^{(\alpha,\beta)}+G_{10}^{(\alpha,\beta)}-G_{1}^{(\alpha,\beta)}-G_{0}^{(\alpha,\beta)}-(1-\eta^{(\alpha)})(G_{1}^{(\alpha,\beta)}-G_{0}^{(\alpha,\beta)})-\eta^{(\alpha)}(G_{1}^{(\alpha,\beta)}-G_{0}^{(\alpha,\beta)})}{\eta^{(\alpha)}(1-\eta^{(\alpha)})(G_{01}^{(\alpha,\beta)}+G_{10}^{(\alpha,\beta)}-G_{1}^{(\alpha,\beta)}-G_{0}^{(\alpha,\beta)})} \tag{36}$$

Сумму в знаменателе выражения (36)

$(G_{01}^{(\alpha,\beta)}+G_{10}^{(\alpha,\beta)}-G_{1}^{(\alpha,\beta)}-G_{0}^{(\alpha,\beta)})$ представим в следующем виде:

$$(G_{01}^{(\alpha,\beta)}+G_{10}^{(\alpha,\beta)}-G_{1}^{(\alpha,\beta)}-G_{0}^{(\alpha,\beta)})=(G_{01}^{(\alpha,\beta)}-G_{1}^{(\alpha,\beta)})+(G_{01}^{(\alpha,\beta)}-G_{1}^{(\alpha,\beta)})+(G_{1}^{(\alpha,\beta)}-G_{0}^{(\alpha,\beta)}) \tag{37}$$

Ввиду, рассмотренных ранее, соотношений (27)-(29)

все три скобки в правой части равенства (37) будут больше нуля.

Поэтому положительно определенным будет и левая часть выражения (37)

$$(G_{01}^{(\alpha,\beta)}+G_{10}^{(\alpha,\beta)}-G_{1}^{(\alpha,\beta)}-G_{0}^{(\alpha,\beta)})>0 \tag{38}$$

Выделим полный квадрат в выражении (34)

Тогда получим:

$$\begin{aligned}G^{(\alpha,\beta)}-G_{1}^{(\alpha,\beta)}&=\eta^{(\alpha)}(1-\eta^{(\alpha)})(G_{01}^{(\alpha,\beta)}+G_{10}^{(\alpha,\beta)}-G_{1}^{(\alpha,\beta)}-G_{0}^{(\alpha,\beta)})\chi\cdot\\ &\cdot\left\{-\chi+\frac{\eta^{(\alpha)}(G_{01}^{(\alpha,\beta)}-G_{1}^{(\alpha,\beta)})+(1-\eta^{(\alpha)})(G_{10}^{(\alpha,\beta)}-G_{1}^{(\alpha,\beta)})}{\eta^{(\alpha)}(1-\eta^{(\alpha)})(G_{01}^{(\alpha,\beta)}-G_{1}^{(\alpha,\beta)})+(G_{10}^{(\alpha,\beta)}-G_{1}^{(\alpha,\beta)})+(G_{1}^{(\alpha,\beta)}-G_{0}^{(\alpha,\beta)})}\right\}\end{aligned} \tag{39}$$

Обозначим центрированные величины как

$G_{01}^{(\alpha,\beta)}-G_{1}^{(\alpha,\beta)}\equiv g_{01}^{(\alpha,\beta)}$,

$G_{10}^{(\alpha,\beta)}-G_{1}^{(\alpha,\beta)}\equiv g_{10}^{(\alpha,\beta)}$,

$G_{1}^{(\alpha,\beta)}-G_{0}^{(\alpha,\beta)}\equiv g_{1}^{(\alpha,\beta)}$,

Выражение (39) примет следующий вид

$$\begin{aligned}G^{(\alpha,\beta)}-G_{1}^{(\alpha,\beta)}&=\eta^{(\alpha)}(1-\eta^{(\alpha)})(g_{01}^{(\alpha,\beta)}+g_{10}^{(\alpha,\beta)}+g_{1}^{(\alpha,\beta)})\chi\cdot\\ &\cdot\left\{-\chi+\frac{\eta^{(\alpha)}g_{01}^{(\alpha,\beta)}+(1-\eta^{(\alpha)})g_{10}^{(\alpha,\beta)}}{\eta^{(\alpha)}(1-\eta^{(\alpha)})(g_{01}^{(\alpha,\beta)}+g_{10}^{(\alpha,\beta)}+g_{1}^{(\alpha,\beta)})}\right\}\end{aligned} \tag{40}$$

Неравенства $g_{01}^{(\alpha,\beta)}>0$, $g_{10}^{(\alpha,\beta)}>0$ являются искомыми достаточными условиями эффекта высокоскоростного перехлеста .

Из них можно выбрать одно , в котором $G_{01}^{(\alpha,\beta)}$ или $G_{10}^{(\alpha,\beta)}$ имеет меньшую величину.

Искомое достаточное условия эффекта высокоскоростного перехлеста следует из положительной определенности правой части выражения (40).

Заметим, что положительность первых двух сомножителей в правой части (40) следует из диапазона   их изменения:

$$0 < \eta^{(\alpha)} < 1 \quad , \quad 0 < (1 - \eta^{(\alpha)}) < 1 .$$

Положительность четвертого сомножителя из диапазона изменения переменной χ :

$$0 \le \chi \le \chi_{\hat{a}}$$

Третий сомножитель совпадает с правой частью выражения (37) и ввиду изложенного выше, так же положителен.

Для заведомого же обеспечения положительности правой части выражения (40) достаточно потребовать выполнение следующих неравенств

$$g_{01}^{(\alpha,\beta)} > 0, \; g_{10}^{(\alpha,\beta)} > 0 \qquad (41)$$

Из них можно выбрать одно , в котором $G_{01}^{(\alpha,\beta)}$ или $G_{10}^{(\alpha,\beta)}$ имеет меньшую величину.

Работа поддержана грантом РФФИ № 14-07-00277_а

ЛИТЕРАТУРА

1. *Генич А.П., Куликов С.В., Манелис Г.Б., Черешнев С.Л.*. Поступательная релаксация в ударных волнах // Черноголовка, Препринт ОИХФ АН СССР. 1991. 68 с.
2. *M. M. Kuznetsov, Yu. D. Kuleshova*. Increase in rates of Kinetic Prosesses inside the Bimodal Hypersonic Shock Wave. // HeatTransRes. – 2012. – v43. – i3. – pp. 228-236.
3. *Куликов С.В., Терновая О.Н., Черешнев С.Л.* Специфика поступательной неравновесности во фронте ударной волны в однокомпонентном газе // Химическая физика. – 1993. – Т. 12, № 3. – С. 340-342.
4. *Кузнецов М.М., Кулешова Ю.Д., Смотрова Л.В.* Эффект поступательной неравновесности в Тамм-Мотт-Смитовской модели ударной волны. //Вестник СПбГУ сер.1, 2012. Вып.3 с.84-86.
5. *Агафонов В.П., Вертушкин В.К., Гладков А.А., Полянский О.Ю.* Неравновесные физико-химические процессы в газодинамике. – М.: Машиностроение, 1972, 344с.
6. *Oberai M.M.* A Mott-Smith distribution to describe the structure of a plane shock wave in binary mixture // Phys Fluids. 1966. vol.9. P. 1634-1637
7. *Кузнецов М. М., Матвеев С. В., Молоствин Е. В., Решетникова Ю. Г., Смотрова Л. В.* Высокоскоростная поступательная неравновесность смеси газов в аналитической модели ударной волны//Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2016. Т.17, вып. 1. http://chemphys.edu.ru/issues/2016-17-1/articles/613/
8. *Э. Беккенбах, Р.Беллман.* Неравенства. Пер. с англ. Под ред. В.И. Левина. Издательство «Мир», М. 1965, 276 с
9. *Башлыков А.М., Великодный В.Ю.* Структура ударных волн в газовой смеси // Журнал технической физики. 1991. Т. 61. №8. С. 33-42
10. *Кузнецов М.М., Кулешова Ю.Д, Смотрова Л.В.* Эффект высокоскоростной поступательной неравновесности в бимодальной ударной волне. Вестник МГОУ сер. «Физика-математика», 2012, №3 с 108-115.