УДК 519.65

Применение метода ортогональных разложений в задаче совместной обработки сигналов мультипликативных измерителей

А.В. Дубовиков, К.А. Ципоркова, Н.И. Ципорков

Рязанский государственный радиотехнический университет

Измерения полезного сигнала, которые содержат мультипликативную помеху, разлагаются в ряд по заданной ортонормированной системе функций. Оценка проводится на основе коэффициентов разложения. Структура оценки выбирается оптимальной в соответствии с выбранным критерием.

Производится m измерений полезного сигнала $\xi(t)$ с нулевым математическим ожиданием и ковариационной функцией $R_\xi(t_1;t_2)$. Все измерения $\eta_j(t)$, $j=\overline{1,m}$ содержит мультипликативную ошибку $\chi_j(t)$ с математическим ожиданием $m_j = const$ и ковариационной функцией $R_\eta(t_1;t_2)$: $\eta_j(t)=\chi_j(t)\cdot\xi(t)$, $j=\overline{1,m}$, $0\le t\le T$. Ошибки коррелированны, их ковариационная матрица $K=\left[R_{ij}(t_1;t_2)\right]_{i,j=1}^{m}$; $R_{ij}(t_1;t_2)=\operatorname{cov}(\chi_i,\chi_j)$. Сигналы $\xi(t)$ и $\chi_j(t)$ независимы. Оценка полезного сигнала $\hat{\xi}(t)$ строится в виде линейной комбинации $\hat{\xi}(t)=\sum\limits_k a_{kj}\gamma_{kj}\phi_k(t)$, где $\left\{\phi_k(t):\int\limits_0^T\phi_k(t)\phi_l(t)\,dt=\delta_{kl}\right\}$ - ортонормированная система функций; δ_{kl} - символ Кронекера, $\gamma_{kj}=\int\limits_0^T\eta_j(t)\phi_k(t)\,dt$ - коэффициенты разложения сигнала $\eta_j(t)$ измерительного сигнала по системе функций $\{\phi_k(t)\}$. Весовые коэффициенты a_{kj} определяются из условия минимума квадратичного функционала качества [1]

$$J=\int\limits_0^T M\left[\left(\hat{\xi}(t)-\xi(t)\right)^2\right]dt\xrightarrow[a_{kj}]{}\min. \qquad (1)$$

Преобразование критерия качества (1) в соответствии с исходными данными дает [2]:

$$J=\int\limits_0^T R_\xi(t;t)\,dt-\sum_k H_k\ , \qquad (2)$$

где $H_k=2G_k\left(\sum\limits_{j=1}^{m}a_{kj}m_jR_\xi\right)-G_k\left(\sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{s=1}^{m}a_{kj}a_{ks}\left(m_jm_s+R_{js}\right)R_\xi\right)$,

$$G_k(R)=\int\limits_0^T\int\limits_0^T R(t_1;t_2)\phi_k(t_1)\phi_k(t_2)\,dt_1dt_2.$$

Таким образом, задача минимизации J сводится к максимизации всех H_k [3], [4]: $H_k\to\max\limits_{a_{kj}}\Leftrightarrow\dfrac{\partial H_k}{\partial a_{kj}}=0$. А это позволяет определить оптимальные значения $a^*_{kj}=\arg\max H_k$ из решения системы уравнений

$$\sum_{s=1}^{m}a_{ks}G_k\left(\left(m_jm_s+R_{js}\right)R_\xi\right)=G_k\left(m_jR_\xi\right),\qquad j=\overline{1,m}. \qquad (3)$$

Максимальное значение $H_k^*=\max H_k$ определяется формулой:

$$H_k^*=G_k\left(R_\xi\right)\sum_{j=1}^{m}m_ja_{kj}^*. \qquad (4)$$

Если включить в состав измерения дополнительную аддитивную составляющую $\nu_j(t)$, то это приводит к вполне естественному усложнению задачи: $\eta_j(t) = \chi_j(t)\xi(t) + \nu_j(t)$, где $\nu_j(t)$ - центрированный случайный процесс с ковариационной функцией $R_j(t_1;t_2)$, $\chi(t), \xi(t), \nu(t)$ - независимы. Отличия от предыдущих результатов, возникающие в этом случае, связаны с изменением выражения для H_k (но с сохранением выражения (2)):

$$H_k = 2G_k\left(\sum_{j=1}^{m} a_{kj} m_j R_\xi\right) - G_k\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{m} a_{kj}a_{ks}\left(m_j m_s + R_{js}\right)R_\xi + R_{\nu_j\nu_s}\right),$$

где $R_{\nu_j\nu_s}(t_1;t_2) = \operatorname{cov}\left(\nu_j(t_1), \nu_s(t_2)\right)$.

В результате система (3) претерпевает соответствующие изменения:

$$\sum_{s=1}^{m} a_{ks} G_k\left(\left(m_j m_s + R_{js}\right)R_\xi + R_{\nu_j\nu_s}\right) = G_k\left(m_j R_\xi\right), \qquad j = \overline{1,m}. \tag{5}$$

Положим $m_j = 1$ ($j = \overline{1,m}$). Это соответствует ситуации, когда полезный сигнал воспроизводится мультипликативной составляющей “в среднем” без искажений. Кроме того, если считать $R_{js} = R_{\nu_j\nu_s} = 0$ при $s \neq j$, т.е. мультипликативные также как и аддитивные составляющие различных измерительных каналов некоррелированными. В этих условиях система (5) упрощается до вида $\sum_{s=1}^{m} a_{ks} + \dfrac{G_k\left(R_{jj}R_\xi + R_{\nu_j\nu_j}\right)}{G_k\left(R_\xi\right)} a_{kj} = 1$, $\quad j = \overline{1,m}$, решение которой может быть легко найдено и показывает, что величина весового коэффициента обратно пропорциональна значению квадратичного функционала

$$G_k\left(R_{jj}R_\xi + R_{\nu_j\nu_j}\right) = \int_0^T\int_0^T \left(R_{jj}(t_1;t_2) R_\xi(t_1;t_2) + R_{\nu_j\nu_j}(t_1;t_2)\right) \phi_k(t_1)\phi_k(t_2)\, dt_1 dt_2 .$$

Литература

1. *Дубовиков А.В.* Выделение полезного сигнала из аддитивной смеси с помехой разложением измерения в ряд Фурье.//Математические методы оптимального управления и обработки данных: Межвуз. сб. - Рязань, 1983. - С. 32-36.
2. *Дубовиков А.В.* Модифицированный метод ортогональных разложений оценивания случайного процесса.// Математические методы в научных исследованиях. Сб. научн. трудов. - Рязань: РГРТА, 2006. – С. 4-7.
3. *Дубовиков А.В.* Распространение метода ортогональных разложений на оценивание линейного функционала от случайного процесса.// Математические методы в научных исследованиях. Сб. научн. трудов. - Рязань: РГРТА, 2006. – С. 7-11.
4. *Дубовиков А.В., Дубовиков Д.А., Ципоркова К.А.* Метод ортогональных разложений при совместной обработке сигналов разнородных измерителей случайного сигнала// Математические методы в экономических исследованиях. Сб. научн. трудов. - Рязань: РГРТА, 2006. – С. 3-7.