УДК 532.5

Моделирование квазиравновесных состояний уравнений двумерной идеальной жидкости

П.А. Пережогин[1,2], В.П. Дымников[2]

[1]Московский физико-технический институт (государственный университет)
[2]Институт вычислительной математики РАН

Уравнения идеальной двумерной жидкости имеют вид:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + J(\psi,\omega) = 0, \Delta\psi = \omega, \tag{1.1}$$

где ω — завихренность, ψ — функция тока, $J(\psi,\omega) = -\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\omega}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial y}$ — якобиан, а Δ — оператор Лапласа. Уравнения рассматриваются на квадратной области $\Omega = [0,2\pi)\times[0,2\pi)$ с периодическими граничными условиями. Уравнения обладают широким классом инвариантов, среди которых энергия $E = -\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\psi\omega dx$, импульс и бесконечное число казимиров $C_n = \int\limits_{\Omega}\omega^n dx$. Энстрофия $Z = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\omega^2 dx$ и завихренность $\int\limits_{\Omega}\omega dx$ являются наиболее известными казимирами.

Уравнения вязкой жидкости имеют вид:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + J(\psi,\omega) = -\nu\Delta^2\omega, \Delta\psi = \omega, \tag{1.2}$$

где ν — параметр бигармонической вязкости. В отличие от уравнений идеальной жидкости (1.1), уравнения вязкой жидкости (1.2) обладают только законами сохранения импульса и завихренности.

Решения уравнений идеальной жидкости (1.1) и вязкой жидкости (1.2) при произвольных начальных данных приходят к квазиравновесным состояниям. Квазиравновесные состояния состоят из крупных когерентных структур, которые имеют масштаб области и содержат в себе большинство энергии системы. Их появление как в вязком (1.2), так и в невязком (1.1) случае можно объяснить с помощью теории каскадов Крайчнана [1]: энергия переходит в крупные масштабы и накапливается на самых крупных Фурье-гармониках, тем самым вызывая образование когерентных структур. В формировании обратного каскада энергии решающую роль играет закон сохранения энстрофии [2]. Отметим, что энстрофия не является инвариантом уравнений вязкой жидкости, однако она является инвариантом гамильтоновой ее части $J(\psi,\omega)$ и способствует движению энергии в крупные масштабы.

Целью нашей работы будет установить, играют ли другие казимиры такую же важную роль в формировании крупномасштабных течений, как и энстрофия. Для ответа на данный вопрос мы исследуем квазиравновесные состояния аппроксимаций Аракавы [3] уравнений идеальной жидкости (1.1) и уравнений вязкой жидкости (1.2). В аппроксимациях Аракавы сохраняются только два квадратичных инварианта (энергия и энстрофия). Гамильтонова часть $J(\psi,\omega)$ уравнений вязкой жидкости обладает всеми законами сохранения идеальной жидкости. Мы выбрали вязкую жидкость, поскольку, в отличие от идеальной жидкости, для вязкой жидкости можно провести численное моделирование, если только выбрать шаг вычислительной сетки соразмерным с минимальным масштабом турбулентности, который определяется вязкостью.

В данной работе мы провели численное моделирование уравнений (1.1) и (1.2) на квадрате с длиной стороны 2π и периодическими граничными условиями. В обоих случаях дискретизация якобиана $J(\psi,\omega)$ проведена по схеме Аракавы [3] с двумя квадратичными законами сохранения (энергия и энстрофия), по времени реализована схема Кранка-Николсон. Схема по времени является неявной и приводит к нелинейной системе уравнений, которая решается методом простых итераций. Относительная точность сохранения квадратичных инвариантов на всем времени расчета составляет 10^{-10} в задаче без вязкости. Расчеты производились на однородной сетке с числом узлов 8192 по каждому направлению.

Внешнее воздействие отсутствует, а начальные данные для поля завихренности ω выбраны кусочно-постоянными, см. рис. 1. Кусочно-постоянный профиль завихренности был выбран для того, чтобы обеспечить распределение энстрофии по широкому диапазону волновых чисел и не допустить образования метастабильных состояний. С течением времени система приходит в квазиравновесное состояние, которое состоит из когерентных структур двух характерных масштабов: два крупных вихря и множество мелких вихрей. Такая структура решений впервые была обнаружена в работе [4] для вязкой жидкости. Мы обнаружили наличие мелких вихрей и в аппроксимациях Аракавы идеальной жидкости. Было показано, что крупномасштабные когерентные структуры, возникающие в уравнениях вязкой жидкости и в аппроксимациях Аракавы уравнений идеальной жидкости, схожи визуально, по виду спектра энстрофии, а также по виду зависимости $\omega = F(\psi)$. Таким образом, мы получаем, что крупномасштабная динамика этих двух моделей идентична. Это приводит нас к выводу о том, что, в отличие от энстрофии, казимиры высокого порядка не играют основополагающей роли в формировании крупномасштабных течений.

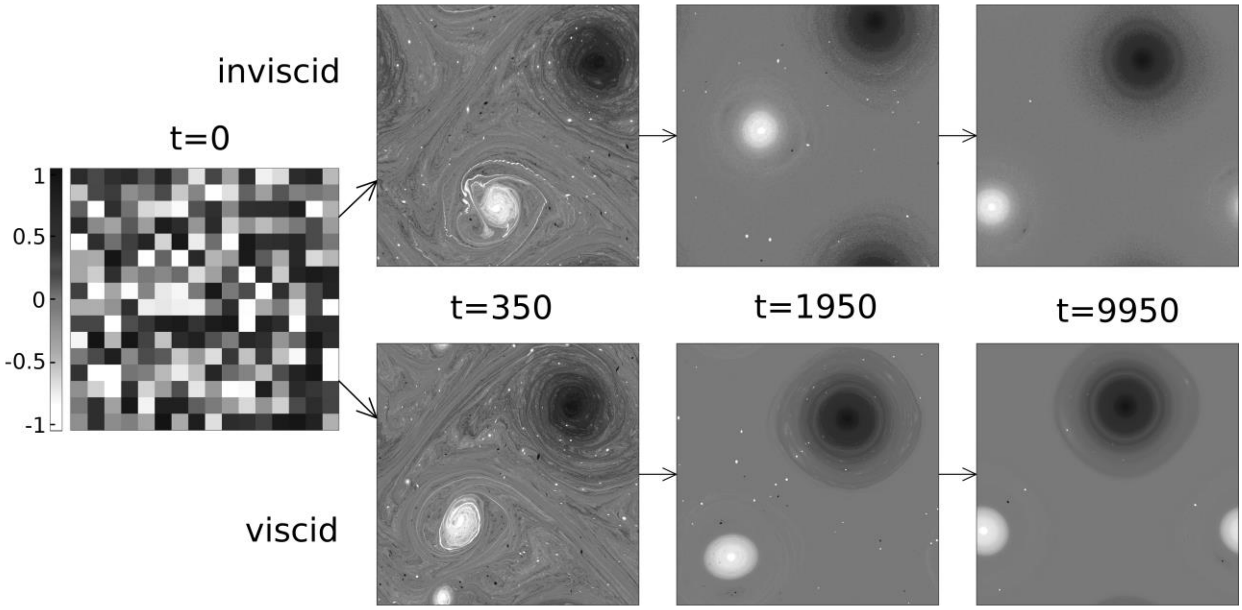

Рис. 1. Поле завихренности в различные моменты времени. Осредненная невязкая задача сверху, вязкая снизу.

Литература

1. *Kraichnan R.* Inertial ranges of two-dimensional turbulence // Physics of Fluids (1958-1988). 1967. V. 10. № 7. P. 1417-1423.
2. *Fjørtoft R.* On the changes in the spectral distribution of kinetic energy for twodimensional, nondivergent flow // Tellus. 1953. V. 5. №. 3. P. 225-230.
3. *Arakawa A.* Computational design for long-term numerical integration of the equations of fluid motion: Two-dimensional incompressible flow. Part I // Journal of Computational Physics. 1966. V. 1. №. 1. P. 119-143.
4. *Dritschel D., Qi W., Marston J.* On the late-time behaviour of a bounded, inviscid two-dimensional flow // Journal of Fluid Mechanics. 2015. V. 783. P. 1-22.