

Исследование геометрического многосеточного метода для решения трехмерного уравнения Пуассона на структурированной сетке

В.О. Гумённый^{1,2,3}

¹Московский физико-технический институт (государственный университет)

²Всероссийский научно-исследовательский институт автоматики им. Н.Л. Духова

³Институт Проблем Механики РАН им. А.Ю. Ишлинского

Важной задачей математической физики является решение уравнений эллиптического типа в частных производных. Одним из таких уравнений является уравнение Пуассона, которое описывает: электростатическое поле, стационарное поле температуры, поле давления, и имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = f(x, y, z), \text{ где } \varphi = \varphi(x, y, z). \quad (1)$$

Для получения численного решения вышеописанной задачи, уравнение можно аппроксимировать используя конечно-разностные схемы. Полученную, путем аппроксимации, систему линейных алгебраических уравнений можно решить классическими итерационными методами, такими как: метод Якоби, метод Гаусса-Зейделя, метод последовательной верхней релаксации[3]. Но для таких методов характерно то, что высокочастотные компоненты ошибки устраняются быстро, а на устранение низкочастотных ошибок уходит куда больше времени, что приводит к низкой скорости сходимости решения уравнения. В целях ускорения процесса решения можно использовать геометрический многосеточный метод для решения эллиптических дифференциальных уравнений.

Многосеточный метод использует последовательность сеток, разрешение которых уменьшается от уровня к уровню. Данный метод позволяет ускорить процесс сходимости классических итерационных методов для решения эллиптических дифференциальных уравнений[1]. Так как классические итерационные методы способны быстро устранять высокочастотные компоненты ошибки, они могут использоваться в качестве сглаживателя при переходе от подробной(грубой) к грубой(подробной), так как при переходе неустранимые низкочастотные ошибки становятся высокочастотными и так же быстро могут быть устранены на более грубой(подробной) сетке. Данный подход к численному решению значительно ускоряет процесс решения уравнения на структурированной сетке[2].

В процессе исследования была создана компьютерная программа для решения трехмерного уравнения Пуассона на структурированной сетке с граничными условиями Дирихле, и заданной правой частью уравнения. Так же были исследованы различные классические итерационные методы, которые возможно использовать в качестве сглаживателя. Был выбран подходящий сглаживатель для решателя, с использованием многосеточного метода для уравнения Пуассона в трехмерном пространстве, на структурированной сетке. В будущем планируется реализовать многосеточный метод для решения уравнений в трехмерном пространстве на неструктурированной сетке.

Литература

1. *Hackbusch W.* Multigrid Method and Application.- Berlin: Springer-Verlag, 1985, 377 с.
2. *W.L.Briggs, V. E. Henson, S.F. McCormick,* A multigrid Tutorial, Second ed.- Philadelphia,PA: SIAM, 2000, 514 с.
3. *Рухтмайер Р., Мортон К.* Разностные методы решения краевых задач- М.: Мир, 1972, 418с.