

## Управление группой квадрокоптеров для транспортировки симметричного груза

Р.Т. Агишев<sup>1</sup><sup>1</sup>Московский физико-технический институт (государственный университет)

## I. Математическая модель движения БПЛА

Движением квадрокоптера можно управлять, изменяя скорости вращения винтов. Аппарат движется относительно неподвижной инерциальной системы отсчета, связанной с Землей. Угловое положение аппарата задаем тремя углами Крылова: углами крена  $\varphi$ , тангажа  $\theta$  и рыскания  $\psi$ , определяющими вращение вокруг осей соответственно.

Введем в рассмотрение две системы координат:

$Oxyz$  – неподвижная, инерциальная система координат.

$Axzy$  – подвижная система координат, связанная с телом аппарата.

На Рис. 1 приведены силы, действующие на аппарат в этом случае.

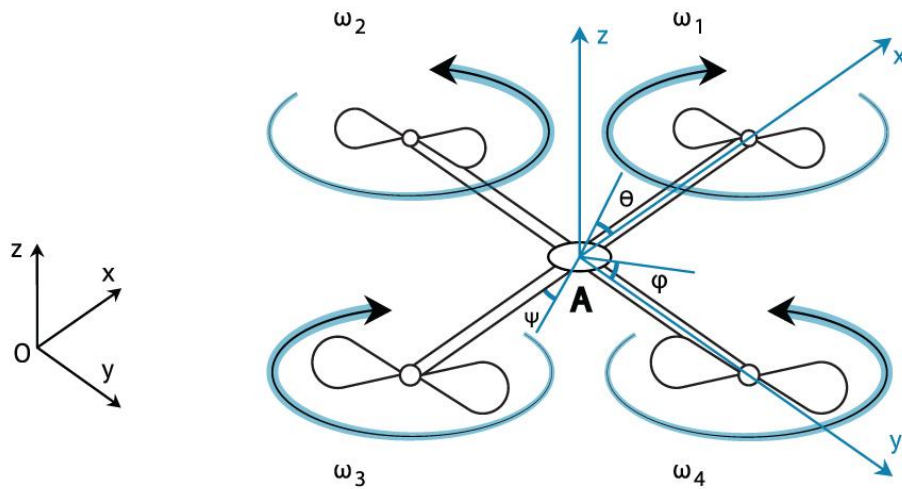


Рис. 1. Действующие на тело силы

$T, A$  – начало координат – является центром масс аппарата,

$Ax$  – ось, располагаемая в диаметральной плоскости, направленная в сторону носа аппарата (при естественном положении совпадает с горизонтом).

$Az$  – ось, совпадающая с линией пересечения основных плоскостей аппарата, направлена противоположно силе тяжести.

$Ay$  – ось, перпендикулярная плоскости  $xz$ .

Оси совпадают с главными осями инерции тела

Второй закон Ньютона для квадрокоптера будет иметь вид:

$$m \frac{dv}{dt} = f,$$

где  $m$  – общая масса тела квадрокоптера,

$v$  – скорость в инерциальной системе отсчета,

$f$  – вектор суммарной силы, приложенной к аппарату.

При переходе системы из неподвижной системы координат в подвижную уравнение движение принимает вид:

$$m \frac{dv}{dt} = m \left( \frac{d_A v}{dt} + w \times v \right) = f,$$

где  $\frac{d_A v}{dt}$  – линейное ускорение относительно подвижной системы координат,  $w$

– угловая скорость вращения подвижной с. к. относительно инерциальной системы.

В подвижной системе координат:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_{x,A} \\ \dot{v}_{y,A} \\ \dot{v}_{z,A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rv_{y,A} - qv_{z,A} \\ pv_{z,A} - rv_{x,A} \\ qv_{x,A} - pv_{y,A} \end{bmatrix} + \frac{1}{m} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где  $\begin{bmatrix} p & q & r \end{bmatrix}^T$  - угловые скорости,  $\begin{bmatrix} v_{x,A} & v_{y,A} & v_{z,A} \end{bmatrix}^T$  - линейные скорости, а  $f = \begin{bmatrix} f_x & f_y & f_z \end{bmatrix}^T$ .

Связь между линейными скоростями и инерциальной и подвижной системой отчета задается соотношением:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = Rv_A, \quad (2)$$

где  $R$  – матрица поворота от подвижной системы координат к инерциальной:

$$R = \begin{bmatrix} C_\psi C_\theta & C_\psi S_\theta S_\varphi - S_\psi C_\varphi & C_\psi S_\theta C_\varphi + S_\psi S_\varphi \\ S_\psi C_\theta & S_\psi S_\theta S_\varphi + C_\psi C_\varphi & S_\psi S_\theta C_\varphi - C_\psi S_\varphi \\ -S_\theta & S_\varphi C_\theta & C_\varphi C_\theta \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где  $S_x = \sin(x)$ ,

$C_x = \cos(x)$ .

После дифференцирования (5), пренебрегая  $R$ , получается

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = R\dot{v}_A. \quad (4)$$

На квадрокоптер действует сила тяжести

$$F_g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix}.$$

В подвижной системе координат сила тяжести принимает вид:

$$F_g = \begin{bmatrix} mg \sin(\theta) \\ -mg \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ -mg \cos(\varphi) \cos(\theta) \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Также на квадрокоптер действует подъемная сила:

$$F = k(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2), \quad (6)$$

где  $k$  - экспериментально определяемая постоянная, а

$\omega_i$  - скорость вращения  $i$ -ого винта.

С учетом уравнений (8) и (9) выражение (4) примет вид:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_{x,A} \\ \dot{v}_{y,A} \\ \dot{v}_{z,A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rv_{y,A} - qv_{z,A} \\ pv_{z,A} - rv_{x,A} \\ qv_{x,A} - pv_{y,A} \end{bmatrix} + \frac{1}{m} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g \sin(\theta) \\ -g \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ -g \cos(\varphi) \cos(\theta) \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Так как инерциальная система отсчета предполагается неподвижной, подставив (10) в (7) и пренебрегая слагаемым в правой части, получается:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = -g \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_\psi S_\theta C_\varphi + S_\psi S_\varphi \\ S_\psi S_\theta C_\varphi - C_\psi S_\varphi \\ C_\varphi C_\theta \end{bmatrix} \frac{F}{m}.$$

Эту систему необходимо дополнить силой сопротивления

$$F_{comp} = c_d \frac{\rho v^2}{2} S,$$

где  $c_d$  - коэффициент аэродинамической силы,

$\rho$  - плотность воздуха,

$v$  - скорость набегающего потока воздуха,

$S$  - площадь набегающего потока аппарата, на которую действует набегающий поток.

Второй закон Ньютона для вращательной системы относительно инерциальной системы координат имеет вид:

$$\frac{dL}{dt} = M,$$

где  $L$  – угловой момент,

$M$  – момент вращающей силы,

При переходе в подвижную систему координат:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d_A L}{dt} + w \times L = M,$$

В неинерциальной системе отсчета  $L = Jw_A$ , где  $J$  - тензор инерции.

Допустим, что тело квадрокоптера является симметричным, представляет собой шар радиусом  $R_s$  и массой  $M_s$ , на расстоянии от которого находятся моторы, представленные в виде материальных точек массой  $M_m$  на расстоянии длины лучей  $l$  от центра, что изображено на Рис. 2

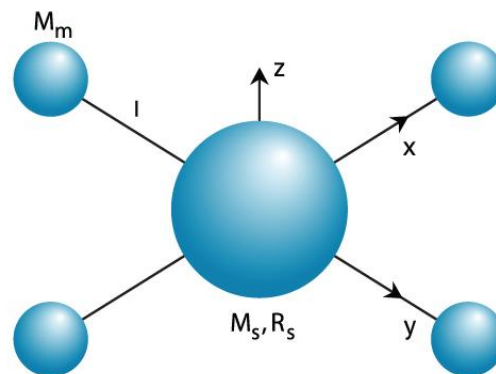


Рис. 2. Схематическое изображение квадрокоптера

Тензор инерции такого тела имеет вид:

$$J = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix},$$

где компоненты тензора выглядят следующим образом:

$$J_x = J_y = \frac{2M_s R_s^2}{5} + 2l^2 M_m,$$

$$J_z = \frac{2M_s R_s^2}{5} + 4l^2 M_m,$$

Представим

$$M_A = [\tau_\varphi, \tau_\theta, \tau_\psi]^T, \text{ тогда}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = J^{-1} \left( \begin{bmatrix} 0 & r & -q \\ -r & 0 & p \\ q & -p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_\varphi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{J_y - J_z}{J_x} qr \\ \frac{J_z - J_x}{J_y} pr \\ \frac{J_x - J_y}{J_z} pq \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{J_x} \tau_\varphi \\ \frac{1}{J_y} \tau_\theta \\ \frac{1}{J_z} \tau_\psi \end{bmatrix}.$$

При допущении  $qr, pr, pq$ –малые, следует

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{J_x} \tau_\varphi \\ \frac{1}{J_y} \tau_\theta \\ \frac{1}{J_z} \tau_\psi \end{bmatrix}$$

(8)

где крутящие моменты  $\tau_\varphi, \tau_\theta, \tau_\psi$  изображены на Рис.3

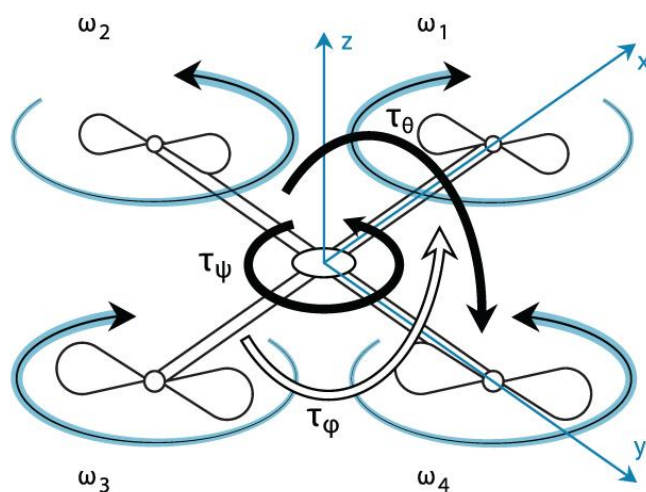


Рис. 3. Крутящие моменты, возникающие на винтах квадрокоптера

Угловые скорости в свою очередь представляются в виде:

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = W \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -S_\theta \\ 0 & C_\varphi & S_\varphi C_\theta \\ 0 & -S_\varphi & C_\varphi S_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = W^{-1} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & S_\varphi T_\theta & C_\varphi T_\theta \\ 0 & C_\varphi & -S_\varphi \\ 0 & S_\varphi / C_\theta & C_\varphi / C_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

$$T_x = \operatorname{tg}(x).$$

При малых  $\varphi$  и  $\theta$  справедливо:

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Поэтому из (11) и (12) следует:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{J_x} \tau_\varphi \\ \frac{1}{J_y} \tau_\theta \\ \frac{1}{J_z} \tau_\psi \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Крутящие моменты винтов прямо пропорциональны квадрату скорости их вращения, выражения для тяги имеют вид:

$$\begin{aligned} \tau_\varphi &= lk(\omega_4^2 - \omega_2^2), \\ \tau_\theta &= lk(\omega_3^2 - \omega_1^2), \\ \tau_\psi &= b(-\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_3^2 + \omega_4^2), \end{aligned} \quad (11)$$

где  $b$  и  $k$  экспериментально определяемые постоянные, а  $\omega_i$  - скорость вращения  $i$ -ого винта.

В итоге математическая модель квадрокоптера конфигурации + приобрела следующий вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \ddot{x} &= (C_\psi S_\theta C_\varphi + S_\psi S_\varphi) \frac{F}{m} - \operatorname{sign}(\dot{x}) c_d \frac{\rho \dot{x}^2}{2} S_x \\ \ddot{y} &= (S_\psi S_\theta C_\varphi - C_\psi S_\varphi) \frac{F}{m} - \operatorname{sign}(\dot{y}) c_d \frac{\rho \dot{y}^2}{2} S_y \\ \ddot{z} &= C_\theta C_\varphi \frac{F}{m} - g - \operatorname{sign}(\dot{z}) c_d \frac{\rho \dot{z}^2}{2} S_z \\ \ddot{\phi} &= \frac{1}{J_x} \tau_\varphi \\ \ddot{\theta} &= \frac{1}{J_y} \tau_\theta \\ \ddot{\psi} &= \frac{1}{J_z} \tau_\psi \end{aligned} \right. \quad (12)$$

Система получилась многомерной. Чтобы избавиться от многомерности, будем составлять систему управления на основе уравнений в подвижной системе отсчета.

Математическая модель квадрокоптера в подвижной системе отсчета имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} = -gS_\theta - \text{sign}(\dot{x})c_d \frac{\rho\dot{x}^2}{2} S_x \\ \ddot{y} = gC_\theta S_\varphi - \text{sign}(\dot{y})c_d \frac{\rho\dot{y}^2}{2} S_y \\ \ddot{z} = C_\theta C_\varphi g - \frac{F}{m} - \text{sign}(\dot{z})c_d \frac{\rho\dot{z}^2}{2} S_z \\ \ddot{\varphi} = \frac{1}{J_x} lk(\omega_4^2 - \omega_2^2) \\ \ddot{\theta} = \frac{1}{J_y} lk(\omega_3^2 - \omega_1^2) \\ \ddot{\psi} = \frac{1}{J_z} b(-\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_3^2 + \omega_4^2) \end{array} \right. . \quad (13)$$

Выполнив линеаризацию уравнений (16), с учетом, что уголы тангажа и крена малые, так как на них изначально было задано ограничение, были получены уравнения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} = -g\theta - \text{sign}(\dot{x})c_d \frac{\rho\dot{x}^2}{2} S_x \\ \ddot{y} = g\varphi - \text{sign}(\dot{y})c_d \frac{\rho\dot{y}^2}{2} S_y \\ \ddot{z} = g - \frac{F}{m} - \text{sign}(\dot{z})c_d \frac{\rho\dot{z}^2}{2} S_z \\ \ddot{\varphi} = \frac{2}{J_x} lk\omega_0(\omega_4 - \omega_2) \\ \ddot{\theta} = \frac{2}{J_y} lk\omega_0(\omega_3 - \omega_1) \\ \ddot{\psi} = \frac{2}{J_z} b\omega_0(-\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 + \omega_4) \end{array} \right. . \quad (14)$$

## II. Уравнения движения системы

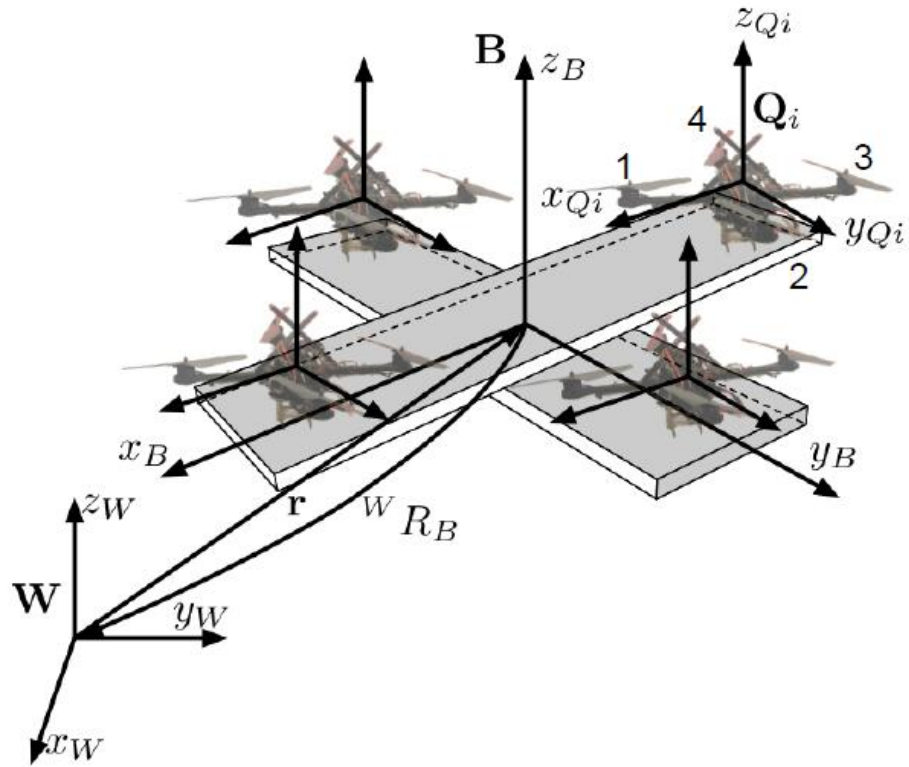


Рисунок 4

Будем рассматривать динамику системы, состоящей из  $n$  квадрокоптеров, жестко прикрепленных к полезной нагрузке. Для описания движения введем две системы координат:  $W$  (world), инерционную, связанную с землей, и  $B$  (body), центр которой совпадает с центром масс нагрузки.

Полная сила тяги, производимая  $i$ -ым квадрокоптером, а также моменты в связанной системе отсчета  $B$  будут определяться матричным соотношением:

$$\begin{bmatrix} F_{q,i} \\ M_{xq,i} \\ M_{yq,i} \\ M_{zq,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & l & 0 & -l \\ -l & 0 & l & 0 \\ \frac{k_M}{k_F} & -\frac{k_M}{k_F} & \frac{k_M}{k_F} & -\frac{k_M}{k_F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{i,1} \\ F_{i,2} \\ F_{i,3} \\ F_{i,4} \end{bmatrix}$$

Полные сила тяги и моменты, создаваемые  $n$  квадрокоптерами в инерциальной системе отсчета будут описываться:

$$\begin{bmatrix} F_B \\ M_{xB} \\ M_{yB} \\ M_{zB} \end{bmatrix} = \sum_i \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ y_i & \cos \psi_i & -\sin \psi_i & 0 \\ -x_i & \sin \psi_i & \cos \psi_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{q,i} \\ M_{xq,i} \\ M_{yq,i} \\ M_{zq,i} \end{bmatrix}$$

Обозначая через  $m$  полную массу системы, получаем уравнение движения центра масс:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix} + R_B^W \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_B \end{bmatrix}$$

Здесь  ${}^W R_B$  обозначена матрица поворота при переходе из системы отсчета  $W$  в  $B$ . Полученное уравнение позволяет найти траекторию движения центра масс подвеса в зависимости от вырабатываемых каждым квадрокоптером сил тяги.

Матрица  ${}^W R_B$ , например, может быть вычислена с помощью функции, написанной в MatLab:

```

function Rzyz = ZYZ(phi,psi,theta)
[~,~,R1] = rotmat(phi);
[~,~,R3] = rotmat(psi);
[~,R2,~] = rotmat(theta);
%Rzyz = simplify(R1*R2*R3);
Rzyz = (R1*R2*R3);
function [RX,RY,RZ] = rotmat(a)
RX = [1 0 0; 0 cos(a) -sin(a); 0 sin(a) cos(a)];
RY = [cos(a) 0 sin(a); 0 1 0; -sin(a) 0 cos(a)];
RZ = [cos(a) -sin(a) 0; sin(a) cos(a) 0; 0 0 1];

```

Уравнение Эйлера для вращательного движение твердого тела:

$$I \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{xB} \\ M_{yB} \\ M_{zB} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times I \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

позволяет найти угловые ускорения тела-нагрузки. Будем считать, что  $x_B$ - $y_B$ - $z_B$  – главные оси инерции, т.е.  $I$  – диагональная матрица. Последние 2 матричных выражения и определяют соответственное поступательное движение и вращение подвеса.

Одной из основных компонент квадрокоптера в задаче подъема грузов служит ПИД-регулятор высоты. Он служит для удержания БПЛА на заданной высоте (desired). В среде MatLab/Simulink был смоделирован подобный регулятор, на вход которого подается ступенчатый сигнал, характеризующий подъем на определенную высоту.

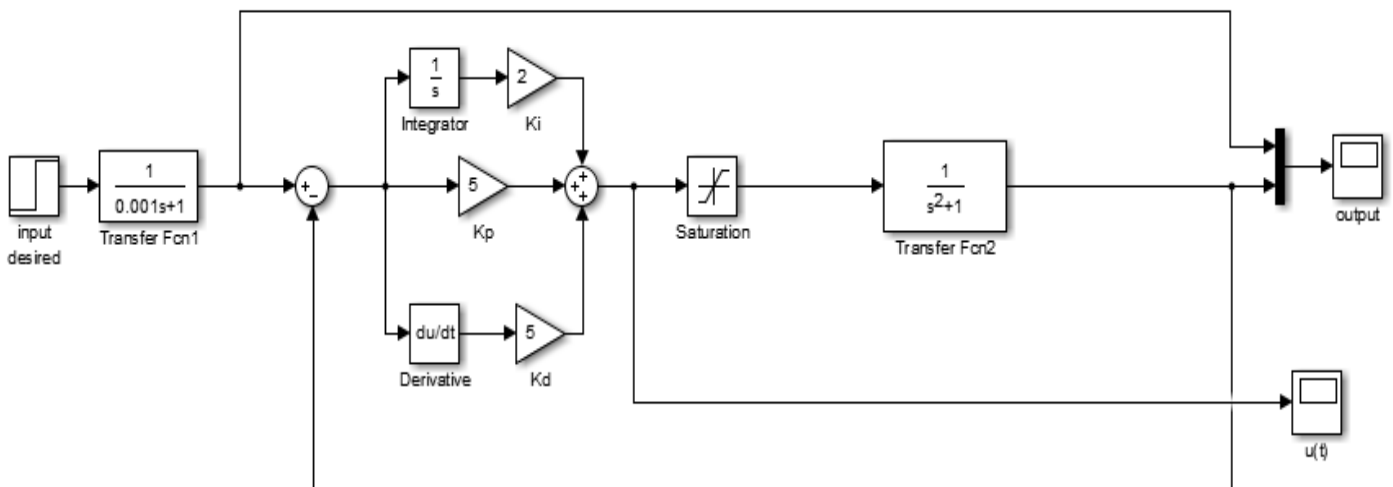


Рисунок 5. PID - регулятор



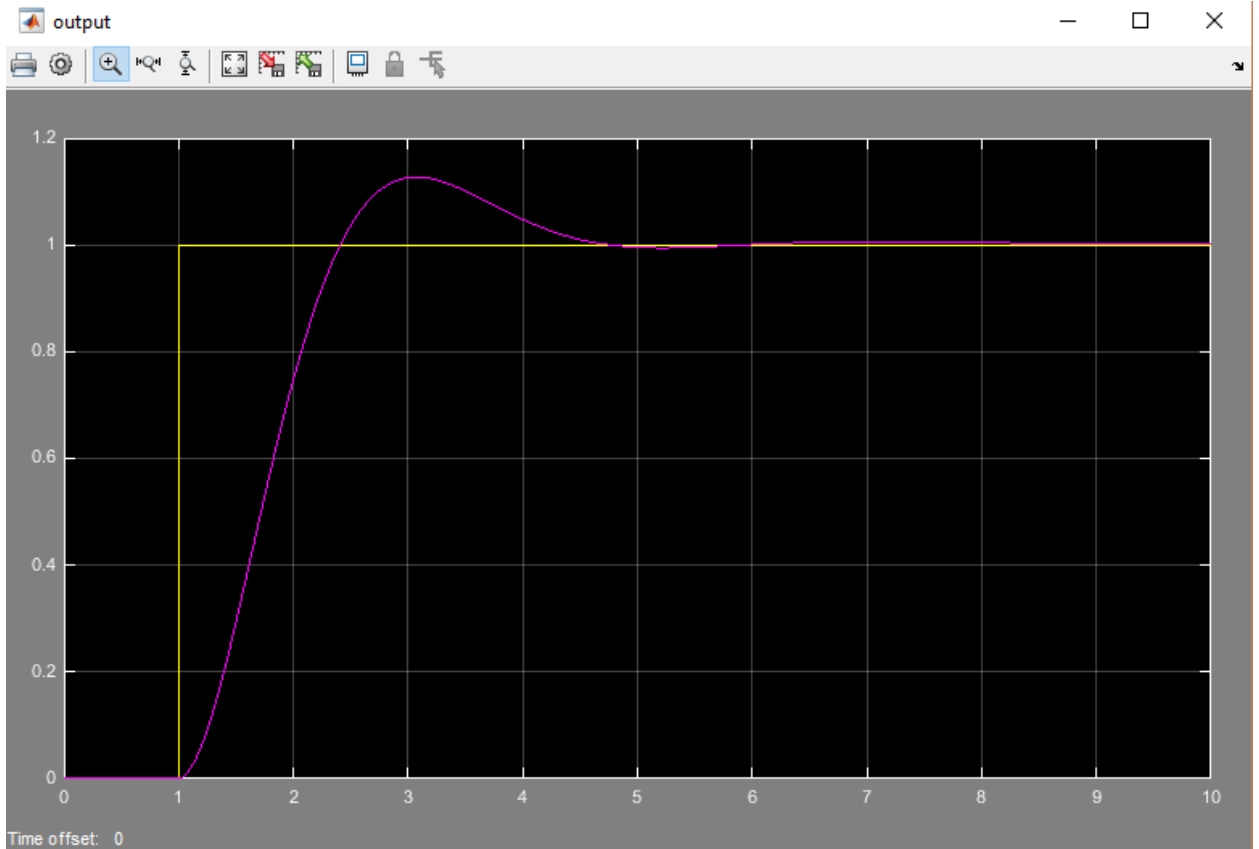


Рисунок 6. Показания осциллографа

На рис. 6 зеленым цветом изображен график желаемой высоты (1 метр), розовым – стабилизированный сигнал на выходе ПИД-регулятора.

Схема на рис. 5 воспроизводит формулу, определяющую работу регулятора:

$$(\ddot{r}_T - r_{des}^{\ddot{}}) + K_d(\dot{r}_T - \dot{r}) + K_p(r_T - r) + K_i \int (r_T - r) dr = 0$$

Для правильной настройки ПИД-регулятора использовался метод Зиглера-Никольса. В результате выбраны следующие коэффициенты:

$$K_p = 2,94; K_i = 0,91; K_d = 2,37.$$

Следующая симуляция показывает, что теоретически квадрокоптер с хорошо отлаженным ПИД-регулятором способен достичь требуемой высоты за короткое время.

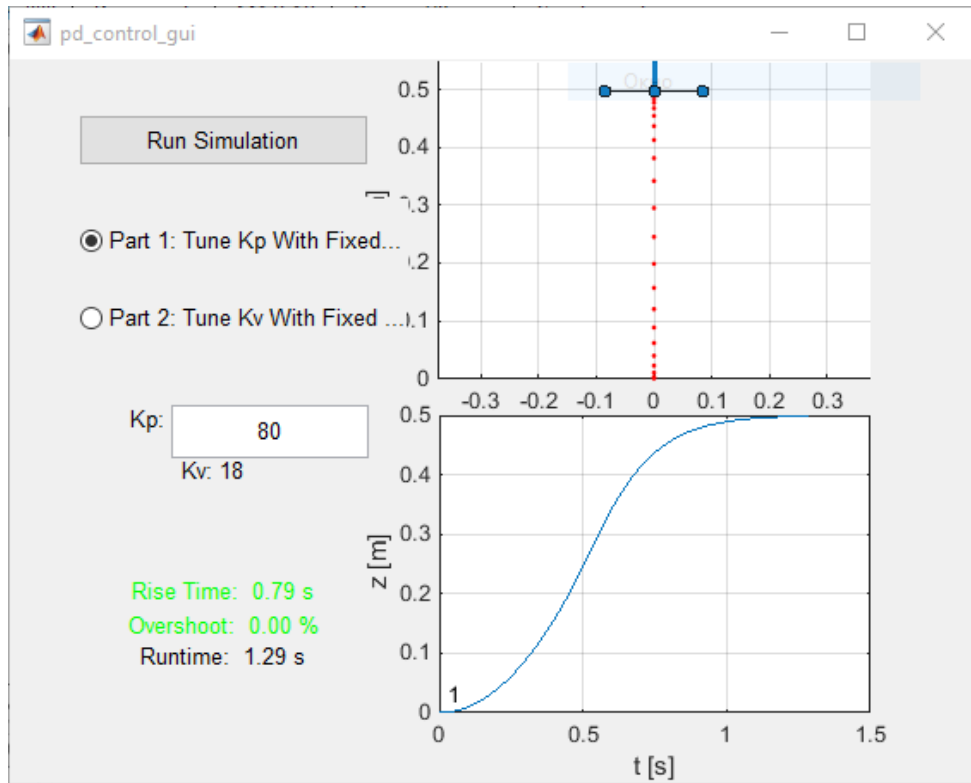


Рисунок 7

### III Результаты моделирования

Сбалансированное распределение нагрузки означает, что и силы тяги квадрокоптеров должны быть равны, а, значит, и вырабатываемые ими мощности. Каждый БПЛА важен при подъеме и транспортировке грузов, поэтому задача равномерного распределения ставит цель достичь наибольшего времени в полете системы квадрокоптеров с грузом.

Выразим основные требования к системе при подъеме:

- $F_i = F \quad \forall i = \overline{1, n}$
- $\sum_{i=1}^n \vec{M}_i = \vec{0} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i$

С учетом первого условия  $F(\sum_{i=1}^n \vec{r}_i) \times \vec{e}_3 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \vec{r}_i = \vec{0}$

Второе условие выражает геометрическую симметричность расположения квадрокоптеров на поднимаемой нагрузке относительно центра масс.

Рассмотрим далее подъем груза в виде креста с помощью четырех квадрокоптеров, расположенных симметрично, как показано на рис.4. Будем считать, что крест – соединение двух одинаковых однородных тонких стержней, длины  $2l$ , а квадрокоптеры – точечные массы. Такая система удовлетворяет описанной в пункте I математической модели квадрокоптера, движение которой будет отвечать уравнениями:

$$\mu \ddot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\mu g \end{bmatrix} + R \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{bmatrix}, \text{ где } R = {}^w R_B,$$

$\mu = M + 4m$  – полная масса системы,  $M$  – масса нагрузки,  $m$  – масса одного коптера.

$$I \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l(F_2 - F_4) \\ l(F_3 - F_1) \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times I \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

$$\text{где } I = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$

$$I_{xx} = I_{yy} = 2ml^2 + \frac{1}{6}Ml^2$$

$$I_{zz} = 4ml^2 + \frac{1}{3}Ml^2$$

В данной работе смоделировано плоское движение системы вдоль 2 траекторий: прямой линии и синусоиды, см. рис. 8,9. Также учтем возможное наличие ветра в виде постоянной силы  $W$ , направленной вдоль оси  $Oy$ . Уравнения:

$$\begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{z} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{W}{\mu} \\ -g \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-\sin(\phi)}{\mu} & 0 \\ \frac{\cos(\phi)}{\mu} & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{xx}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

где  $u_1$  – управляющая сила,  $u_2$  – момент  
далее линеаризуются,  $u_1$  и  $u_2$  выражаются через реальные и желаемые координаты:

$$\phi_c = -\frac{1}{g} \left( \frac{W}{\mu} + \ddot{y}_{des} + k_{d,s}(y_{des} - \dot{y}) + k_{p,y}(y_{des} - y) \right)$$

$$u_2 = k_{p,\phi}(\phi_c - \phi) + k_{d,\phi}(\dot{\phi}_c - \dot{\phi})$$

$$u_1 = m(g + z_{des}'' + k_{d,z}(z_{des}' - \dot{z}) + k_{p,z}(z_{des} - z))$$

В ходе работы были подобраны указанные 6 коэффициентов для ПД-регуляторов.

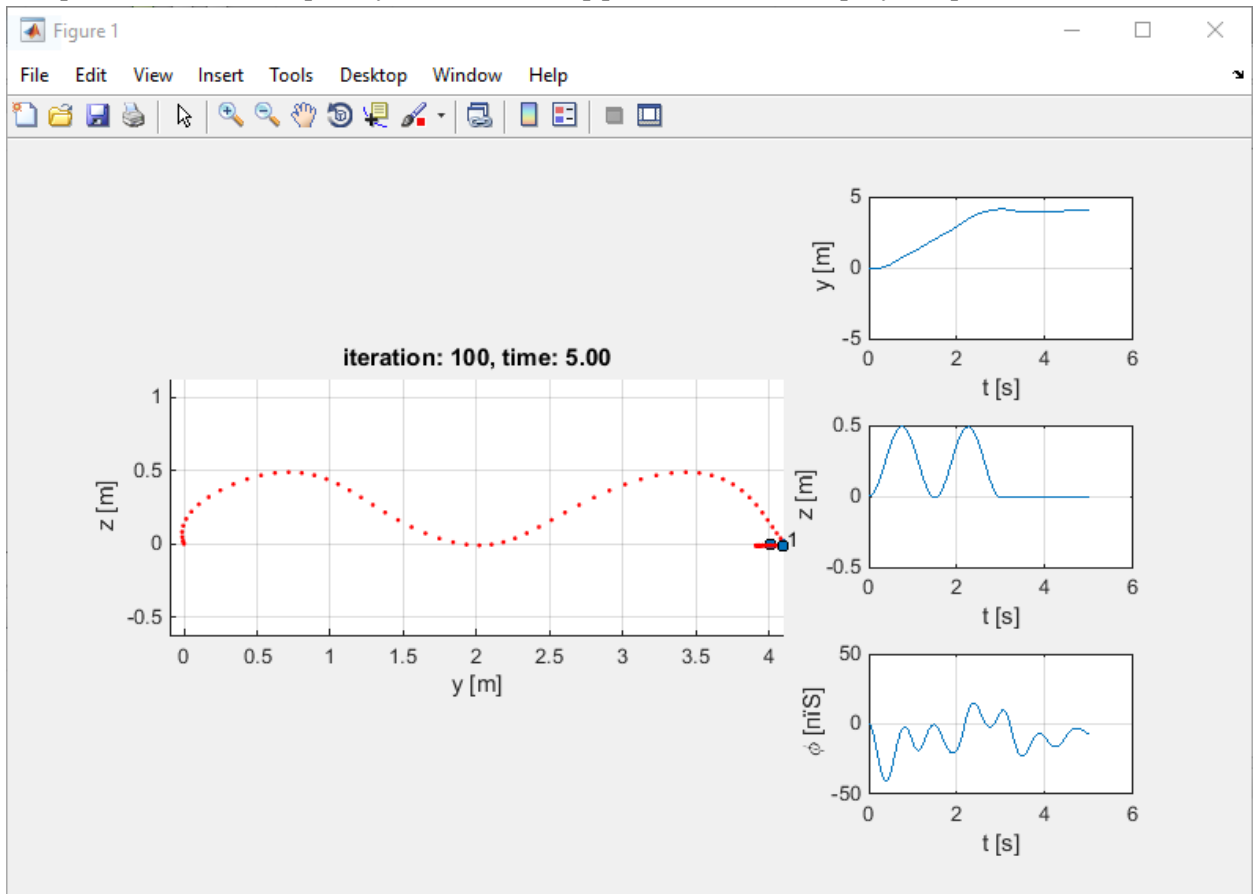


Рисунок 8 Движение вдоль синусоиды

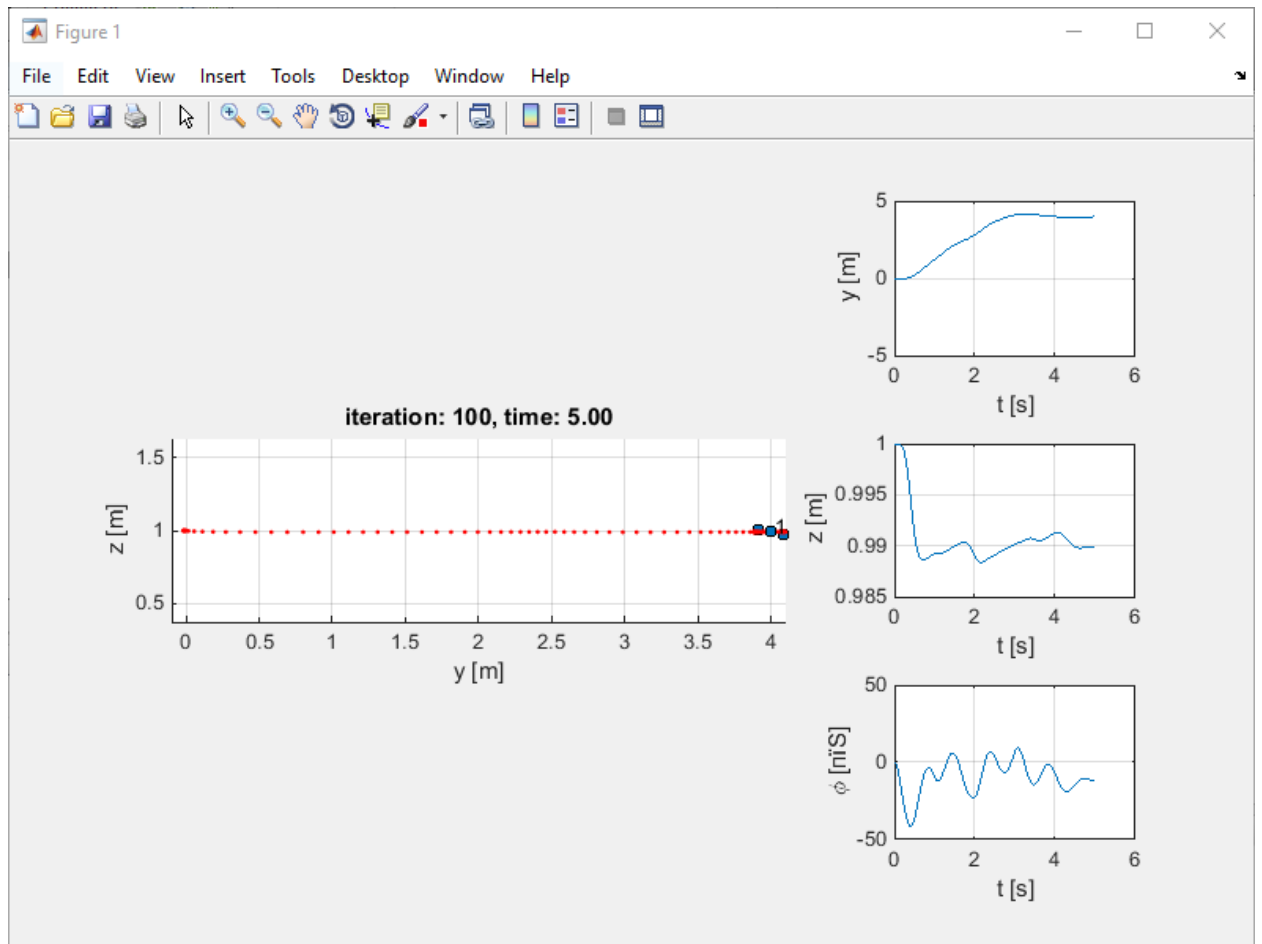


Рисунок 9 Движение вдоль прямой

### Литература

1. Mellinger, D., Michael, N., and Kumar, V., "Trajectory Generation and Control for Precise Aggressive Maneuvers with Quadrotors," Int. Symposium on Experimental Robotics, December 2010.
2. K. Sreenath, N. Michael, and V. Kumar, "Trajectory generation and control of a quadrotor with a cable suspended load – a differentially-flat hybrid system," in *ICRA*, Karlsruhe, Germany, May 2013
3. J. Fink, N. Michael, S. Kim, and V. Kumar, "Planning and control for cooperative manipulation and transportation with aerial robots," *Int. J. Robot. Res.*
4. Control of Quadrotors for Robust Perching and Landing Daniel Mellinger, Michael Shomin, and Vijay Kumar GRASP Lab, University of Pennsylvania