УДК 531.384

Поворот треноги вращением маятника

С.В. Семендяев

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Интерес к новым подвижным системам, не использующим внешние движители, – колеса, гусеницы, ноги – возрос за последние десятилетия [1]. Новый класс механизмов (роботов, мехатронных систем) способных перемещаться в сопротивляющейся среде благодаря движению внутренних масс привлекает широкое внимание [2].

В данной работе рассматривается тренога – твердая конструкция с тремя точками контакта на шероховатой поверхности. К треноге цилиндрическим шарниром прикреплен вращающий математический маятник в однородном поле тяжести. Схема (вид сверху) представлена на рис. 1, где $G\xi\eta\zeta$ - связанная с треногой система отсчета, а $Gxyz$ - неподвижная система отсчета.

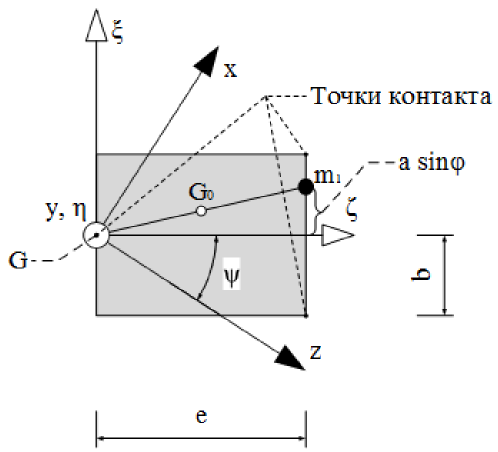

Рис. 1. Механическая модель треноги при вращательном движении (вид сверху).

Маятник приводится во вращение моментом сил, подчиняющимся соотношению:

$$M = A - B\dot{\varphi}, \quad A, B = const, \quad A, B > 0. \tag{1}$$

Выражение для потенциальной энергии маятника в поле тяжести:

$$\Pi = -m_1 ag\cos\varphi. \tag{2}$$

Предполагая вращение вокруг третьей ножки, а также то, что центр масс треноги G имеет проекцию в точку контакта третьей ножки с поверхностью и то, что G покоится, получим выражение для кинетической энергии механической системы при повороте:

$$\begin{gathered} T = \frac{1}{2}\left(m_1\left(\theta e^2 + a^2\sin^2\varphi\right) + J\right)\dot{\psi}^2 + \\ + \frac{1}{2}a^2 m_1\dot{\varphi}^2 + m_1 ea\cos\dot{\psi}\dot{\varphi}, \end{gathered} \tag{3}$$

где $\theta = \dfrac{m_1}{m + m_1}$; m - масса треноги, J - центральный момент инерции треноги вокруг вертикали, ψ - угол поворота треноги на поверхности.

Пользуясь формализмом Лагранжа с учетом сил конечного трения с коэффициентом μ в точках контакта, получим уравнения движения:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{\psi} \\ \ddot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где для элементов матрицы имеем следующие соотношения:

$$c_{11} = m_1 ea\cos\varphi,\ \ c_{12} = m_1 a^2,\ \ c_{22} = m_1 ea\cos\varphi,$$

$$c_{21} = m_1\left(\theta e^2 + a^2\sin^2\varphi\right) + J + \frac{\theta^2 a^2\left(m + m_1\right)}{2}\sin^2\varphi,$$

$$f_1 = m_1 a^2\sin\varphi\cos\varphi\,\dot{\psi}^2 - m_1 ag\sin\varphi + A - B\dot{\varphi},$$

$$f_2 = \frac{\mu ge\left(m + m_1\right)}{\sqrt{e^2 + b^2\sin^2\varphi}}\left(\frac{\theta e^2}{\sqrt{e^2 + b^2}} - \sqrt{e^2 + b^2}\right) - \tag{5}$$

$$-\frac{\theta^2 ab\left(m + m_1\right)}{2}\sin\varphi\left(\dot{\psi}^2 e + 2a\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos\varphi\right) -$$

$$-\dot{\varphi}\dot{\psi} m_1 a^2\sin 2\varphi + m_1 ea\sin\varphi\dot{\varphi}^2.$$

Методом Крамера находим выражения для старших производных:

$$\ddot{\psi} = \frac{f_1 c_{22} - f_2 c_{12}}{c_{11}c_{22} - c_{21}c_{12}},\qquad \ddot{\varphi} = \frac{f_2 c_{11} - f_1 c_{21}}{c_{11}c_{22} - c_{21}c_{12}}. \tag{6}$$

Далее решаем задачу Коши для $q = \left(\Psi, \varphi\right)^T$ численным интегрированием:

$$\ddot{q} = Q\left(\dot{q}, q\right),\ q\left(0\right) = q_0,\ \dot{q}\left(0\right) = \dot{q}_0. \tag{7}$$

Литература

1. *Иванов А.П., Сахаров А.В.* Динамика твердого тела с подвижными внутренними массами и ротором на шероховатой плоскости // Нелинейная динамика. — 2012. — Т. 8, № 4, — С. 763-772.
2. *Черноусько Ф.Л., Болотник Н.Н.* Мобильные роботы, управляемые движением внутренних тел // Тр. ИММ УрО РАН. — 2010. — Т. 16, №5, — С. 213–222.