УДК 517.9

Квантование Фока канонических преобразований и набег длинных волн на берег

В.Е. Назайкинский
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской Академии наук
Московский физико-технический институт (государственный университет)

В линейном приближении уравнений мелкой воды [1,2] набег длинных волн (таких, как волны цунами) на берег можно описывать волновым уравнением

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} - \operatorname{div}(c^2(x)\operatorname{grad}\eta) = 0$$

для возвышения свободной поверхности $\eta = \eta(x,t)$ в области $\Omega \subset \mathbf{R}^2$, задающей бассейн, в котором квадрат скорости задается формулой $c^2(x) = gD(x)$, где g – ускорение свободного падения, а $D(x)$ – глубина в точке x. Дополним это уравнение начальными условиями

$$\eta|_{t=0} = \eta_0(x), \qquad \eta_t|_{t=0} = \eta_1(x)$$

следующего специального вида: если речь идет о волне цунами, порожденной источником, локализованным вблизи точки $x_0 \in \Omega$, то в соответствии с поршневой моделью генерации цунами [1,2]

$$\eta_0(x) = V\left(\frac{x - x_0}{\mu}\right), \qquad \eta_1(x) = 0,$$

где быстро убывающая функция $V(y)$ задает форму источника, а параметр μ характеризует его радиус. В естественных для задачи масштабах параметр μ оказывается малым, и это наводит на мысль, что для ее решения можно использовать хорошо известный асимптотический метод, основанный на каноническом операторе Маслова [3], однако вырождение скорости на «береговой линии» $\partial\Omega$ ($c^2(x) = 0$, $x \in \partial\Omega$) приводит к тому, что в стандартном виде указанный метод неприменим.

Таким образом, задача состоит в том, чтобы избавиться от вырождения, преобразовав уравнение подходящим образом. Предположим, что вырождение регулярно в том смысле, что $\operatorname{grad}(c^2(x)) \neq 0$ при $x \in \partial\Omega$. Тогда в окрестности границы каноническое преобразование

$$y = q^2 E, \qquad \xi = -\frac{1}{q}$$

(где y – переменная вдоль нормали к $\partial\Omega$, а ξ – двойственный к ней импульс) приводит гамильтониан $H(x,p) = c(x)|p|$ к невырожденной форме, а чтобы привести к невырожденному виду само уравнение, достаточно применить к этому каноническому преобразованию квантование Фока [4]. Полученный оператор (квантованное каноническое преобразование), который и осуществляет необходимое приведение, оказывается не чем иным, как преобразованием Ганкеля с малым параметром h:

$$[\mathcal{H}u](y) = \frac{1}{h}\int_0^\infty \mathbf{J}_0\left(\frac{2\sqrt{yE}}{h}\right)u(E)\,dE,$$

где $\mathbf{J}_0(z)$ – функция Бесселя нулевого индекса.

В докладе будет подробно рассказано как о самой процедуре квантования Фока, так и о деталях ее применения в рассматриваемой задаче.

Доклад основан на результатах исследований, проведенных совместно с С.Ю. Доброхотовым и Б. Тироцци (см. обзор [5], где можно найти ссылки на оригинальные работы).

Работа поддержана грантом РФФИ 14-01-00521.

Литература

1. *Stoker J.J.* Water Waves: The Mathematical Theory with Applications. New York: John Wiley and Sons, 1958. 609 с.
2. *Пелиновский Е.Н.* Гидродинамика волн цунами. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 1996. 276 с.
3. *Маслов В.П.* Теория возмущений и асимптотические методы. М.: МГУ, 1965. 550 с.
4. *Фок В.А.* О каноническом преобразовании в классической и квантовой механике // Вестник ЛГУ. 1959. № 16. С. 67–70.
5. *Доброхотов С.Ю., Назайкинский В.Е.* Асимптотики волновых и вихревых локализованных решений линеаризованных уравнений мелкой воды // Актуальные проблемы механики (сборник, посвященный 50-летию Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН). М.: Наука, 2015. С. 98–139.