УДК 531.38

Необходимые и достаточные условия устойчивости стационарных движений гиростата

В.О. Кренделев[1,2], Ф.Л. Черноусько[1,2]

[1]Московский физико-технический институт (государственный университет)

[2]Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

Рассмотрена динамика свободного гиростата (рис.1), состоящего из несущего тела и трех твердых роторов, установленных в твердых подшипниках. Роторы в несущем теле расположены взаимно перпендикулярно; их оси направлены вдоль главных осей инерции гиростата. В осях подшипников роторов действуют силы вязкого трения. Введены две декартовы системы координат, начала которых совпадают с центром масс гиростата C: $Cy_1y_2y_3$, оси которой движутся поступательно, и $Cx_1x_2x_3$, жестко связанная с твердым телом, оси которой являются главными осями инерции гиростата относительно точки C. Следуя работе [1] получим систему уравнений движения, описывающих движение гиростата относительно центра масс C:

$$\begin{gathered}\mathbf{J}\cdot\dot{\boldsymbol{\omega}}+\sum_{\mathbf{i}=1}^{3}\dot{\mathbf{h}}_{\mathbf{i}}+\boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\omega}+\sum_{\mathbf{i}=1}^{3}\mathbf{h}_{\mathbf{i}})=\mathbf{0}\\ \mathbf{e}_{\mathbf{i}}\cdot(\mathbf{J^r}_{\mathbf{i}}\cdot\dot{\boldsymbol{\omega}}+\dot{\mathbf{h}}_{\mathbf{i}})=\mathbf{e}_{\mathbf{i}}\cdot\mathbf{M^r}_{\mathbf{i}}\end{gathered}\tag{1}$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}$ - угловая скорость несущего тела относительно системы $Cy_1y_2y_3$; $\mathbf{h}_\mathbf{i}=\mathbf{J^r}_\mathbf{i}\cdot\boldsymbol{\omega}^\mathbf{r}_\mathbf{i}$ - гиростатический момент i-го ротора ($i=1,2,3$), представляющий собой кинетический момент i-го ротора в системе координат $Cx_1x_2x_3$; $\boldsymbol{\omega}^\mathbf{r}_\mathbf{i}$ - угловая скорость i-го ротора ($i=1,2,3$) относительно несущего тела; $\mathbf{J}$ - тензор инерции системы относительно точки C; $\mathbf{J^r}_\mathbf{i}$ - тензор инерции i-го ротора ($i=1,2,3$) относительно центра масс i-го ротора; компоненты тензоров $\mathbf{J}$ и $\mathbf{J^r}_\mathbf{i}$ постоянны в системе координат $Cx_1x_2x_3$; $\mathbf{e}_\mathbf{i}$ - единичный вектор, направленный вдоль оси i-го ротора ($i=1,2,3$); $\mathbf{M^r}_\mathbf{i}$ - главный момент сил, действующих со стороны несущего тела, приложенных к i-му ротору ($i=1,2,3$). Как уже было сказано, в осях подшипников действуют силы вязкого трения. Так же как и в работе [2], момент $\mathbf{M^r}_\mathbf{i}$ считаем равным $(-k\boldsymbol{\omega}^\mathbf{r}_\mathbf{i})$, где k- постоянный коэффициент пропорциональности.

Положим:

$$\mathbf{J}=\begin{pmatrix}A&0&0\\0&B&0\\0&0&C\end{pmatrix},\mathbf{J^r}_\mathbf{1}=\begin{pmatrix}I_1&0&0\\0&I_{12}&0\\0&0&I_{13}\end{pmatrix},\mathbf{J^r}_\mathbf{2}=\begin{pmatrix}I_{21}&0&0\\0&I_2&0\\0&0&I_{23}\end{pmatrix},\mathbf{J^r}_\mathbf{3}=\begin{pmatrix}I_{31}&0&0\\0&I_{32}&0\\0&0&I_3\end{pmatrix};$$

все компоненты тензоров $\mathbf{J}$ и $\mathbf{J^r}_\mathbf{i}$ заданы в системе координат $Cx_1x_2x_3$.

Оси вращения роторов совпадают с главными осями инерции всей системы, следовательно вектора $\mathbf{h}_\mathbf{i}$ направлены вдоль этих главных осей инерции:

$$\mathbf{h_1}=\begin{pmatrix}I_1\Omega_1\\0\\0\end{pmatrix},\mathbf{h}_2=\begin{pmatrix}0\\I_2\Omega_2\\0\end{pmatrix},\mathbf{h}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\I_3\Omega_3\end{pmatrix};\qquad \boldsymbol{\omega}=\begin{pmatrix}p\\q\\r\end{pmatrix}.$$

Здесь $\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3$ - компоненты векторов $\boldsymbol{\omega}^\mathbf{r}_\mathbf{i}$ ($i=1,2,3$), заданные в системе координат $Cx_1x_2x_3$; компоненты вектора $\boldsymbol{\omega}$ - p, q, r заданы в той же системе координат.

Тогда система уравнений (1) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} &A\dot{p} + I_1\dot{\Omega}_1 - (B-C)qr - I_2\Omega_2 r + I_3\Omega_3 q = 0, \quad && I_1\dot{p} + I_1\dot{\Omega}_1 = M^r{}_1 \\ &B\dot{q} + I_2\dot{\Omega}_2 - (C-A)pr + I_1\Omega_1 r - I_3\Omega_3 p = 0, \quad && I_2\dot{q} + I_2\dot{\Omega}_2 = M^r{}_2 \\ &C\dot{r} + I_3\dot{\Omega}_3 - (A-B)pq + I_2\Omega_2 p - I_1\Omega_1 q = 0, \quad && I_3\dot{r} + I_3\dot{\Omega}_3 = M^r{}_3 \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $M^r{}_1, M^r{}_2, M^r{}_3$- проекции моментов сил, действующих со стороны несущего тела на соответствующие роторы, соответственно на оси x_1, x_2, x_3. Как уже было сказано, в осях подшипников действуют силы вязкого трения. Так же, как и в работе [2], моменты- $M^r{}_1, M^r{}_2, M^r{}_3$ считаем равными $(-k_1\Omega_1), (-k_2\Omega_2), (-k_3\Omega_3)$ соответственно, где k_1, k_2, k_3 – постоянные коэффициенты пропорциональности.

Определим возможные стационарные движения твердого тела. Для этого в (2) положим: $p \equiv p_0$, $q \equiv q_0, r \equiv r_0, \Omega_1 \equiv \Omega_{10}, \Omega_2 \equiv \Omega_{20}, \Omega_3 \equiv \Omega_{30}$. В итоге получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} &(B-C)q_0 r_0 = 0 \\ &(A-C)p_0 r_0 = 0 \\ &(A-B)p_0 q_0 = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Из системы (3) следует, что стационарное вращение тела может происходить только вокруг главной оси инерции тела для точки *C* с произвольной величиной угловой скорости.

Перейдем к исследованию устойчивости стационарных движений гиростата. За невозмущенное движение примем вращение гиростата вокруг оси x_1 с постоянной угловой скоростью ω_0, описываемое равенствами: $p = \omega_0, q = r = \Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = 0$. Положим в возмущенном движении: $p = \omega_0 + x, q = \tilde{q}, r = \tilde{r}, \Omega_1 = \omega_1, \Omega_2 = \omega_2, \Omega_3 = \omega_3$. Тогда, линеаризуя систему (2), получаем:

$$\begin{aligned} &A\dot{x} + I_1\dot{\omega}_1 = 0, && I_1\dot{x} + I_1\dot{\omega}_1 + k_1\omega_1 = 0 \\ &B\dot{\tilde{q}} + I_2\dot{\omega}_2 + (A-C)\omega_0\tilde{r} - I_3\omega_0\omega_3 = 0, \quad && I_2\dot{\tilde{q}} + I_2\dot{\omega}_2 + k_2\omega_2 = 0 \\ &C\dot{\tilde{r}} + I_3\dot{\omega}_3 - (A-B)\omega_0\tilde{q} + I_2\omega_0\omega_2 = 0, \quad && I_3\dot{\tilde{r}} + I_3\dot{\omega}_3 + k_3\omega_3 = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Два уравнения системы (4), записанных в первой строке, независимы от остальных четырех уравнений. Поэтому, как и в работе [2], характеристическое уравнение для системы (4) распадается на два уравнения:

$$\begin{aligned} &(A - I_1)I_1\lambda^2 + k_1 A\lambda = 0 \\ &a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} &a_0 = I_2 I_3 B_0 C_0; a_1 = I_2 B_0 (C_0 + I_3)k_3 + I_3 C_0 (B_0 + I_2)k_2; \\ &a_2 = (A_0 + I_1 - B_0)(A_0 + I_1 - C_0)I_2 I_3 \omega_0{}^2 + (B_0 + I_2)(C_0 + I_3)k_2 k_3; \\ &a_3 = I_2(A_0 + I_1 - B_0)(A_0 + I_1 - C_0 - I_3)\omega_0{}^2 k_3 + \\ &+ I_3(A_0 + I_1 - C_0)(A_0 + I_1 - B_0 - I_2)\omega_0{}^2 k_2; \\ &a_4 = (A_0 + I_1 - B_0 - I_2)(A_0 + I_1 - C_0 - I_3)\omega_0{}^2 k_2 k_3. \end{aligned}$$

Здесь введены новые параметры: $A_0 = A - I_1; B_0 = B - I_2, C_0 = C - I_3$.

Т.к. первое уравнение системы (5) имеет один нулевой корень, а другой отрицательный, из рассмотрения линеаризованной системы можно получить лишь необходимые, но не достаточные условия устойчивости движения.

Для устойчивости движения необходимо, чтобы все характеристические корни λ обладали неположительными вещественными частями: $\operatorname{Re}\lambda \le 0$. Это условие выполняется для первого уравнения (5). Коэффициенты второго уравнения (5) содержат большое количество буквенных параметров, поэтому наиболее удобным критерием выполнения вышеуказанного условия, при $a_0 > 0$, является критерий Льенара – Шипара [3], в котором, как и в работе [2], можно допустить знаки равенств: $a_1 \ge 0, a_2 \ge 0, a_4 \ge 0, a_1 a_2 a_3 \ge a_1^2 a_4 + a_0 a_3^2$. Проведем анализ этих условий, учитывая выражения для коэффициентов второго уравнения (5): первое неравенство выполняется всегда; второе неравенство выполняется наверняка, если оба множителя $(A_0 + I_1 - B_0)$ и $(A_0 + I_1 - C_0)$ одновременно либо неотрицательны, либо неположительны; третье неравенство выполняется, если множители $(A_0 + I_1 - B_0 - I_2)$ и $(A_0 + I_1 - C_0 - I_3)$ одновременно либо неотрицательны, либо неположительны. Видно, что условия для выполнения второго и третьего неравенств связаны. Выберем наиболее “сильные” из них, и получим:

$$\begin{aligned} A_0 + I_1 - B_0 - I_2 \ge 0 \\ A_0 + I_1 - C_0 - I_3 \ge 0 \end{aligned} \quad (6) \qquad \text{или} \qquad \begin{aligned} A_0 + I_1 - B_0 < 0 \\ A_0 + I_1 - C_0 < 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Наконец, для четвертого неравенства, после преобразований получим:

$$\begin{aligned} &\beta I_2^2 I_3^2 \omega_0^2 [(A_0 + I_1 - B_0) B_0 k_3 + (A_0 + I_1 - C_0) C_0 k_2] + \\ &+ \alpha k_2 k_3 [I_2^2 (C_0 + I_3)(A_0 + I_1 - C_0 - I_3) k_3 + I_3^2 (B_0 + I_2)(A_0 + I_1 - B_0 - I_2) k_2] \ge 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь:

$$\alpha = I_2 (C_0 + I_3) B_0 k_3 + I_3 (B_0 + I_2) C_0 k_2,$$

$$\beta = I_2 (A_0 + I_1 - B_0)(A_0 + I_1 - C_0 - I_3) k_3 + I_3 (A_0 + I_1 - C_0)(A_0 + I_1 - B_0 - I_2) k_2.$$

Неравенство (8) выполняется только при условиях (6), таким образом эти условия и будут являться необходимыми условиями устойчивости. Эти условия можно записать в виде: $A \ge B$ и $A \ge C$.

Сравнивая данные результаты с результатами, полученными в работе [2], обратим внимание на то, что необходимые условия устойчивости для тела со сферическим демпфером накладывают ограничения лишь на величины главных моментов инерции несущего тела, а в данном случае- на величины главных моментов инерции всей системы.

Для получения достаточных условий устойчивости, запишем первый интеграл системы (2):

$$K^2 = (Ap + I_1 \Omega_1)^2 + (Bq + I_2 \Omega_2)^2 + (Cr + I_3 \Omega_3)^2 = const. \quad (9)$$

Первый интеграл (9) представляет собой закон сохранения кинетического момента всей системы. Также запишем кинетическую энергию системы T:

$$2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + I_1 \Omega_1^2 + 2I_1 p \Omega_1 + I_2 \Omega_2^2 + 2I_2 q \Omega_2 + I_3 \Omega_3^2 + 2I_3 r \Omega_3 \quad (10)$$

В силу системы (2) кинетическая энергия (10) не возрастает при движении, т.е. $dT/dt \le 0$. Как и в работе [2], следуя идее метода Четаева, составим функцию Ляпунова:

$$V = 2AT - K^2 + [K^2 - A^2 \omega_0^2]^2 \quad (11)$$

В невозмущенном движении функция (11) обращается в нуль. При возмущенном движении функция (11) будет зависеть от переменных $x, \tilde{q}, \tilde{r}, \omega_1, \omega_2, \omega_3$:

$$\begin{aligned} V = & [I_1(A-I_1)\omega_1{}^2 + 4A^2\omega_0{}^2(Ax+I_1\omega_1)^2] + \\ & +[B(A-B)q^2 + I_2(A-I_2)\omega_2{}^2 + 2I_2(A-B)q\omega_2] + \\ & +[C(A-C)r^2 + I_3(A-I_3)\omega_3{}^2 + 2I_3(A-C)r\omega_3] + ... \end{aligned} \qquad (12)$$

Здесь точками обозначены члены порядка малости выше второго. Первая квадратная скобка в (12)- положительно определенная квадратичная форма при $\omega_0 \neq 0$. Вторая и третья скобки будут являться положительно определенными квадратичными формами при $A > B$ и $A > C$. При этих условиях функция V будет положительно определенной. Так как $dK^2 / dt = 0$ и $dT / dt \leq 0$, то производная функции (11) неположительна: $dV / dt \leq 0$. По теореме Ляпунова движение при полученных условиях ($\omega_0 \neq 0$, $A > B$, $A > C$) будет устойчивым.

Таким образом для устойчивости стационарного вращения свободного гиростата, движение которого описывается системой (2), вокруг оси x_1 при $\omega_0 \neq 0$ необходимо выполнение условий $A \geq B$ и $A \geq C$. Таким образом стационарное вращение гиростата является устойчивым лишь в случае, когда это вращение происходит вокруг оси наибольшего главного момента инерции.

Аналогичные результаты для свободного твердого тела со сферическим демпфером получены в работе [2].

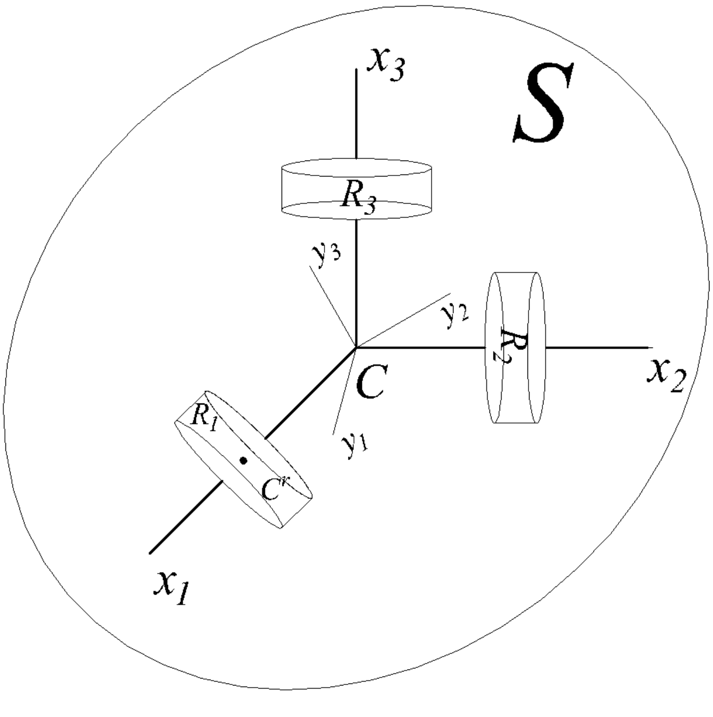

Рис.1

Литература

1. *Виттенбург Й.* Динамика систем твердых тел. М.: Мир, 1980. 293 с.
2. *Черноусько Ф.Л.* О движении твердого тела, содержащего сферический демпфер// ПМТФ. 1968.№1.С.73-79.
3. *Гантмахер Ф.*Р. Теория матриц. М.: Физматлит, 2010. 560 с.