УДК 536.24

Процессы теплообмена в цилиндрическом теле, окруженном воздухом

***А.А. Гавриков*[1], *Г.В. Костин*[1,2]**

[1]Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН
[2]Московский физико-технический институт (государственный университет)

Рассмотрена задача остывания цилиндрического тела, помещенного в воздушную среду. Полагается, что на боковой поверхности теплообмен с окружающей средой происходит по закону Ньютона (краевое условие третьего рода); на торцах цилиндра поддерживается заданный тепловой поток. С целью построения модового управления ставится задача нахождения собственных значений и функций

$$\begin{aligned} &y^2 v''(y) + y v'(y) + (y^2 - m^2) v(y) = 0, \quad y \in (0, \mu z_1^{-1} r_1), \\ &v(0) < \infty, \quad [\mu \pi \lambda z_1^{-1} v'(y) + \alpha v(y)]_{y = \mu z_1^{-1} r_1} = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где z_1 — длина цилиндра, r_1 — радиус, $y = \mu \pi z_1^{-1} r$, $\mu > 0$ — собственное значение (СЗ) задачи (1), $\alpha > 0$ — коэффициент теплообмена, а собственные функции (СФ) исходного температурного поля имеют вид

$$\theta(t, r, \phi, z) = \exp(-\nu t) v(y) \cos(m\phi) \cos(n\pi z_1^{-1} z), \tag{2}$$

и $m, n \in \mathrm{N}$, t — время, r — радиальная переменная, ϕ — угловая, z — осевая.

Решение уравнения (1) — это функция Бесселя первого рода m-го порядка $J_m(y)$; СЗ $\mu = \mu_{m,k}$ находятся как корни векового уравнения, получаемого подстановкой функции Бесселя в краевое условие; индекс k соответствует последовательному номеру корня векового уравнения. СЗ для температурного поля определяются как $\nu = \nu_{m,k,n} = \mu_{m,k}^2 + n^2$, а характерное время затухания (ВЗ) данной моды как $\tau_{m,k,n} = z_1^2 (a\pi^2)^{-1} \nu_{m,k,n}^{-1}$.

На примере алюминиевого цилиндрами с параметрами [1] $r_1 = 31$ мм, $z_1 = 100$ мм, $\lambda = 254.4$ Вт/(мК) (коэффициент теплопроводности), $\rho = 2700$ кг/м^3 (плотность), $c_p = 896$ Дж/(кгК) (удельная теплоемкость), $\alpha = 53.8$ вычислены СЗ и построены СФ. Существенно, что низшее СЗ (ВЗ $\tau_{0,0,0} = 698.124$ сек) значительно отличается от остальных (например, следующему по величине СЗ отвечает ВЗ $\tau_{0,0,1} = 9.504$ сек), а соответствующая нормированная СФ, отвечающая охлаждению тела как целого, близка к постоянной (отличие в третьем порядке).

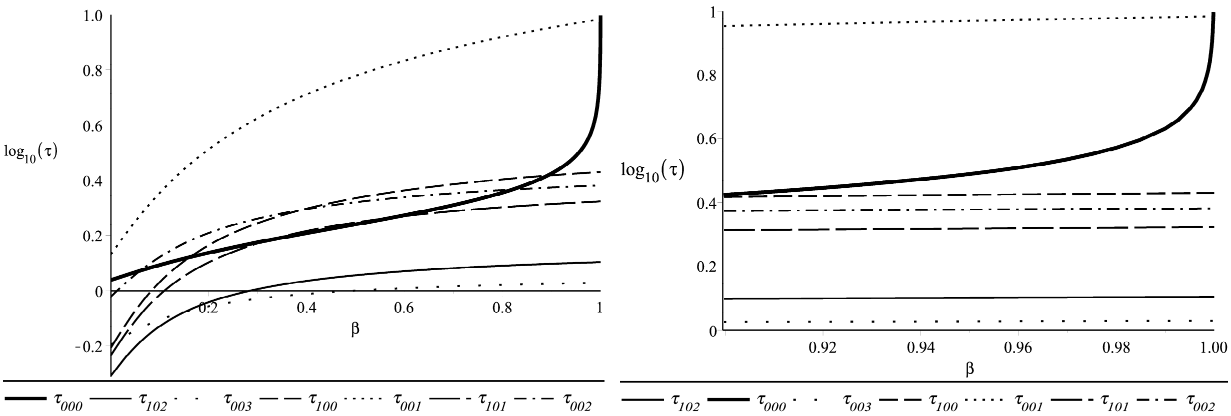
Поскольку коэффициент теплообмена α может изменяться в значительных пределах и существенно зависит от условий охлаждения (режима обдувания цилиндра, наклона по отношению к воздушному потоку и т.д.), проведено исследование влияния α на СЗ. Введем параметризацию $\beta = \mathrm{Nu}/(1 + \mathrm{Nu})$, где $\mathrm{Nu} = \lambda / \alpha z_1$ — число Нуссельта, тогда значение $\beta = 0$ (Nu=0) соответствует режиму заданной температуры на боковой поверхности (краевое условие Дирихле), а $\beta = 1$ (Nu=∞) — режиму заданного теплового потока (краевое условие Неймана). На рис. 1 приведено поведение наибольших (соответствующих низшим СЗ) характерных ВЗ при изменении параметра β. Установлено, что величина $\tau_{0,0,0}$ существенно зависит от коэффициента теплообмена, и в области изучаемых значений α (от 0 до 150) может уменьшаться на два порядка с ростом α. Прочие $\tau_{m,n,k}$ (за исключением $\tau_{0,0,1}$, изменяющегося на 5%) меняются слабо (отличие в третьем порядке). Отметим, что в условиях, близких к режиму заданной температуры на боковой поверхности, возможно переупорядочивание $\tau_{m,n,k}$ по величине, что может представлять интерес при экспериментальном определении коэффициента теплообмена с помощью замеров температуры в пучностях собственных мод (2).

Изучено также распределение температуры в цилиндре в режиме вынужденного нагревания и охлаждения на торцах: при $z=0$ на вход задается экспоненциальный или колебательный режим теплового потока, соответствующий первой СФ: $\lambda\theta_z\big|_{z=0} = \exp(\nu_0 t) J_0(\mu_{0,0}\pi r z_1^{-1})$, на противоположном торце ($z=z_1$) ставится условие теплоизоляции (выход). Поскольку первая СФ близка к константе, подобное краевое условие моделирует реализуемый в эксперименте режим равномерного по торцу нагрева цилиндра и не возбуждает процессов теплообмена, неоднородных по угловой переменной. Распределение температуры вдоль оси имеет вид

$$Z(y) = c_1(\nu_0)\sin(\xi y) + c_2(\nu_0)\cos(\xi y), \quad \xi = \sqrt{B\nu_0 - \mu_{0,0}^2},$$

где $c_{1,2}$ — функции от ν_0, $B = z_1^2 \rho c_p / \lambda\pi^2$. Установлено, что в этих условиях при изменении ν_0 проявляются эффекты типа резонанса вблизи критических значений показателя — например, резкий рост или понижение температуры в точках входа и выхода, изменение теплового потока вдоль оси на противоположный и т.д. Кроме того, показано, что подавая на вход осциллирующий тепловой поток, возможно вызвать колебательный режим распределения температуры вдоль оси.

Работа выполнена при поддержке фонда Александра фон Гумбольдта (Германия) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант 15-01-00827).



а) б)

Рис. 1. Поведение характерных ВЗ $\tau_{m,n,k}$ при изменении β во всей области изменения параметра (а) и в области изучаемых значений α (б). Для $\tau_{0,0,0}$ приведена кривая $(\log_{10}\tau_{0,0,0})/5$.

Литература

1. *Rauh A., Kersten J.; Aschemann H.* Robust Control for a Spatially Three-Dimensional Heat Transfer Process // IFAC-PapersOnLine. 2015. V. 48. I. 14. P. 101-106.