УДК 534.1

Решение векторной краевой задачи Штурма-Лиувилля с нелинейной зависимостью от спектрального параметра

А.А. Гавриков[1]

[1]Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

Собственные колебания многомерных механических систем могут быть описаны уравнением

$$(P(x,\lambda)U'(x))' + R(x,\lambda)U(x) = 0, \quad x \in (0,l) \subset R \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$A_0U(0) = B_0P(0,\lambda)U'(0), \quad A_lU(l) = B_lP(l,\lambda)U'(l), \tag{2}$$

где штрихом обозначена производная по x, спектральный параметр $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}$; P,R — действительнозначные матричные функции размерности $n\times n$, элементы которых суть функции, кусочно-непрерывные по переменной x и гладкие по СП λ: $p_{ij}(x,\lambda), r_{ij}(x,\lambda) \in PC[0,l^*]\times C_1(\Lambda)$, $l^* = l+\delta_0, \delta_0 > 0$, и выполнены условия сопряженности для постоянных матриц $A_{0,l}, B_{0,l}$: $A_0B_0^T = B_0A_0^T, A_lB_l^T = B_lA_{l,}^T$ причем одна из матриц A_0, B_0 имеет полный ранг n и то же верно для матриц A_l, B_l. Требуется найти собственные значения (СЗ) $\lambda\in\Lambda$ такие, что существует нетривиальная кусочно-гладкая собственная вектор-функции (СФ) $U = (U_1,\dots,U_n)^T$ и $U(x)$, $P(x,\cdot)U'(x) \in C_1^n[0,l^*]$. Предположим, что матрица P обратима, СЗ λ есть гладкая функция от длины интервала l, и то же верно для обратной функции $l(\lambda)$: $\lambda(l)\in C_1[0,l^*], l(\lambda)\in C_1(\Lambda)$, и одна из матриц производных P'_λ, R'_λ невырождена (см. ниже).

Проведено обобщение метода Акуленко-Нестерова, разработанного для решения одномерных задач подобного типа и классических векторных задач [1-3].

Дифференцируя систему (1,2) по параметру l, можно выразить производную

$$\lambda'(l) = \frac{\partial\lambda(l)}{\partial l} = -\frac{\big(U',PU'\big)(l) + \big(U,RU\big)(l)}{N(\lambda,l)},$$

где $N(\lambda,l) = \big(U',P'_\lambda U'\big)_{L_2} + \big(U,R'_\lambda U\big)_{L_2}$, $(\cdot,\cdot)_{L_2}$ — скалярное произведение вектор функций в $L_2(0,l)$, а $(\cdot,\cdot)(l)$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$ значений вектор-функций в точке l, и предполагается, что $N\neq 0$.

Пусть $\lambda^{(i)}$ — некоторое приближение искомого СЗ. Опишем итерационную процедуру, позволяющую найти СЗ и СФ с заданной точностью:

1) Найти численно или аналитически n вектор-функций $V_{(i,j)}$, решений задач Коши

$$(P(x,\lambda^{(i)})V'_{(i,j)}(x))' + R(x,\lambda^{(i)})V_{(i,j)}(x) = 0, \quad x>0$$

с начальными условиями $V_{(i,j)}(0) = e_i, P(0,\lambda^{(i)})V'_{(i,j)}(0) = B_0^{-1}A_0e_i$, если $rankB_0 = n$, или $V_{(i,j)}(0) = A_0^{-1}B_0P(0,\lambda^{(i)})V'_{(i,j)}(0)e_i$, $P(0,\lambda^{(i)})V'_{(i,j)}(0) = e_i$, если $rankA_0 = n.$

2) Найти ближайший к l (или m-й, если известно m — номер СЗ) корень $\xi^{(i)}$ уравнения $\Delta(x)=0$, где $\Delta(x) = \det(A_lW(x) - B_lPW'(x))$, а W и PW' — матрицы, составленные из решений $W = (V_{(i,1)},\dots,V_{(i,n)})$, $PW' = (PV'_{(i,1)},\dots,PV'_{(i,n)})$, где $\lambda = \lambda^{(i)}$.

3) Найти постоянный вектор $c = (c_1,\dots,c_n)^T$ такой, что $(A_lW(\xi^{(i)}) - B_lPW'(\xi^{(i)}))c = 0$, и приближение СФ $U_{(i)} = c_1V_{(i,1)} + \dots + c_nV_{(i,n)}$.

4) Следующее приближение к искомому СЗ находится по формуле $\lambda^{(i+1)} = \lambda^{(i)} - \varepsilon^{(i)} l M(\lambda^{(i)}, \xi^{(i)}) \big/ N(\lambda^{(i)}, \xi^{(i)})$, где $\varepsilon^{(i)} = (l - \xi^{(i)})/l$,

$$M(\lambda^{(i)}, \xi^{(i)}) = (U'_{(i)}, P(\lambda^{(i)}) U'_{(i)})(\xi^{(i)}) + (U_{(i)}, R(\lambda^{(i)}) U_{(i)})(\xi^{(i)}).$$

Отметим, что, если матричные функции P, P^{-1} по крайней мере кусочно-гладкие на интервале $(0, \xi^{(i)})$, то величина N здесь может быть найдена с помощью решения неоднородной задачи Коши $(PK')' + RK = -(P'_\lambda P^{-1})' PU'_{(i)} - [R'_\lambda - (P'_\lambda P^{-1})R]U_{(i)}$ с начальными условиями $K(0) = 0$, $PK'(0) = -P'_\lambda U'_{(i)}(0)$, и

$$N(\lambda^{(i)}, \xi^{(i)}) = (PU'_{(i)}, K)(\xi^{(i)}) - (U_{(i)}, PK')(\xi^{(i)}) - (U_{(i)}, P'_\lambda U'_{(i)})(\xi^{(i)}).$$

Можно показать, что достаточно хорошего начального приближения $\lambda^{(0)}$ такого, что $|\varepsilon^{(0)}| << 1$, описанная процедура сходится и $|\lambda - \lambda^{(i)}| = O(\varepsilon^{\theta_i}), \theta_i = 2^i$. Кроме того, если для некоторого j выполнено $M(\lambda^{(j)}, \xi^{(j)}) \big/ N(\lambda^{(j)}, \xi^{(j)}) > 0$ и $\xi^{(j)} < l$, то $\lambda^{(j)} > \lambda$; а если $\xi^{(j)} > l$, то $\lambda^{(j)} < \lambda$. При $M(\lambda^{(j)}, \xi^{(j)}) \big/ N(\lambda^{(j)}, \xi^{(j)}) M < 0$ неравенства меняются на противоположные. Таким образом, можно получить двустороннюю оценку $\lambda^{(j)} < \lambda < \lambda^{(k)}$ и достичь заданной точности $\zeta > \lambda^{(k)} - \lambda^{(j)}$.

Описанная процедура протестирована на ряде примеров, имеющих аналитическое решение. Рассмотрим систему типа Эйлера

$$P = f(x)\begin{pmatrix} 1 & 5\lambda \\ 5\lambda & 4 \end{pmatrix}, R = \lambda f^2(x)\begin{pmatrix} \lambda & 15 \\ 15 & 4\lambda \end{pmatrix}, A_{0,l} = B_{0,l} = E,$$

где $f(x) = (1+x)^{-2}$. Решение этой задачи для $\lambda > (15 + 3\sqrt{89})/16$ выражается как линейная комбинация частных решений $(1+x)^{1.5}\sin(\gamma^+ \ln(1+x))$, $(1+x)^{1.5}\cos(\gamma^+ \ln(1+x))$, $(1+x)^{1.5 \pm \gamma^-}$, где $\gamma^\pm = \sqrt{40\lambda^3 \pm 91\lambda^2 - 60\lambda \mp 36} \big/ (10\lambda \pm 4)$. В табл. 1 приведены результаты расчетов для $\lambda \approx 49.710217$. Здесь m — отличие $\lambda^{(0)}$ от искомого СЗ, M — число итераций, потребное для достижения относительной погрешности $e_r = \left|(\lambda^{(M)} - \lambda)/\lambda\right| < 10^{-6}$, e_a — абсолютная погрешность, $\varepsilon^{(0)} l$ — промах при первом проходе алгоритма, $\varepsilon^{(M)} l$ — при последнем (соответствует предпоследнему $\lambda^{(M-1)}$).

m,%	e_r	e_a	$\varepsilon^{(0)} l$	$\varepsilon^{(M)} l$	M
1	$7.3 \cdot 10^{-8}$	$2.1 \cdot 10^{-6}$	$-3.6 \cdot 10^{-3}$	-10^{-4}	2
20	$4.3 \cdot 10^{-7}$	$1.3 \cdot 10^{-5}$	-0.12	$-1.6 \cdot 10^{-4}$	4
40	$1.6 \cdot 10^{-7}$	$4.7 \cdot 10^{-6}$	-0.49	$-4.1 \cdot 10^{-6}$	6

Таблица 1.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 16-31-60078-мол_а_дк).

Литература

1. *Akulenko L.D.*, *Nesterov S.V.* High-Precision Methods in Eigenvalue Problems and Their Applications. Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 2004. 260 p.

2. *Гавриков А.А.* Численное решение обобщенной задачи Штурма-Лиувилля // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник докладов. 2015. 836–837.

3. *Гавриков А.А.* Собственные продольные колебания тонкого стержня переменного сечения при учете инерции поперечного сечения //Труды 58-й научной конференции МФТИ. Аэрофизика и космические исследования. 2015. С. 30–31.