УДК 629.78

Об одном способе разгона космического аппарата до параболической скорости

А.С. Охитина[1,2]*, С.А. Мирер*[1,2]

[1]Московский физико-технический институт (государственный университет)
[2]Институт прикладной математики им. Келдыша РАН

Рассмотрена задача разгона космического аппарата (КА), находящегося в начальный момент времени на круговой орбите, до параболической скорости при помощи постоянной касательной тяги. Моделирование динамики полета КА в процессе разгона до второй космической скорости проводится численно. Результаты численного моделирования сравниваются с приближенными оценками, полученными в [1].

При выводе уравнений движения используется инерциальная декартова система координат Oxyz с началом в притягивающем центре, а также локальный базис в текущей точке траектории КА, который составляют единичный вектор направления нормали и единичный касательный вектор.

Используя введенные системы координат можем расписать выражения для скорости и ускорения КА:

$$\mathbf{v} = \mathrm{v}\mathbf{i}_\tau = \frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{dt}}\mathbf{i}_\tau \tag{1}$$

$$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{dt}}\mathbf{i}_\tau\right) = \frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}}\mathbf{i}_\tau + \frac{\mathrm{v}^2}{\rho}\mathbf{i}_\mathrm{n} \tag{2}$$

В качестве независимой переменой удобно использовать путь, пройденный КА вдоль траектории s. С использованием выражения для кривизны траектории

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\mathrm{r}}\left[1-\left(\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{ds}}\right)^2 - \mathrm{r}\frac{\mathrm{d^2r}}{\mathrm{ds^2}}\right]\left[1-\left(\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{ds}}\right)^2\right]^{-1/2} \tag{3}$$

Уравнениие движения имеет вид:

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{dt}^2} + \mu\frac{\mathbf{r}}{\mathrm{r}^3} = \mathrm{a}_\tau\mathbf{i}_\tau \tag{4}$$

Спроектируем ускорение (2) на радиальное и тангенциальное направления:

$$\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{a}_\tau - \mu\frac{\mathbf{r}}{\mathrm{r}^2}\cos\gamma, \tag{5}$$

$$\frac{\mathrm{v}^2}{\rho} = \frac{\mu}{\mathrm{r}^2}\sin\gamma. \tag{6}$$

Из соотношения $(\mathrm{ds})^2 = (\mathrm{dr})^2 + (\mathrm{r\,d}\vartheta)^2$ установим, что

$$\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{ds}} = \cos\gamma,\ \ \mathrm{r}\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{ds}} = \sin\gamma = \sqrt{1-\cos^2\gamma} = \left[1-\left(\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{ds}}\right)^2\right]^{1/2}.$$

Теперь перепишем с помощью этих соотношений уравнения (5) и (6):

$$\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{v}\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{ds}} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\left(\mathrm{v}^2\right)}{\mathrm{ds}} = \mathrm{a}_\tau - \frac{\mu}{\mathrm{r}^2}\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{ds}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\left(\mathrm{v}^2\right)}{\mathrm{ds}} + \frac{\mu}{\mathrm{r}^2}\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{ds}} = \mathrm{a}_\tau, \tag{7}$$

$$\frac{\mathrm{v}^2}{\rho} = \frac{\mu}{\mathrm{r}}\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{ds}}. \tag{8}$$

Подставим в уравнение (8) выражение (3) для кривизны, получаем

$$\mathrm{v}^2\frac{1}{\mathrm{r}}\left[1-\left(\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{ds}}\right)^2 - \mathrm{r}\frac{\mathrm{d^2r}}{\mathrm{ds^2}}\right]\left[1-\left(\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{ds}}\right)^2\right]^{-1/2} = \frac{\mu}{\mathrm{r}}\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{ds}}$$

или

$$v^2 r\frac{d^2 r}{ds^2}+\left(v^2-\frac{\mu}{r}\right)\left[\left(\frac{dr}{ds}\right)^2-1\right]=0. \qquad (9)$$

Проинтегрируем уравнение (7) при условии, что $a_\tau = \mathrm{const}$:

$$\int_{v_0}^{v} d\left(v^2\right)+2\mu\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{r^2}=2a_\tau\int_0^s ds,$$

где $v_0 = v_{кр} = \sqrt{\mu/r_0}$ – скорость на начальной круговой орбите.

Таким образом,

$$v \;= 2a_\tau s+\mu\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{r_0}\right). \qquad (10)$$

Теперь, зная выражение для квадрата скорости, вернемся к уравнению (9) и перепишем его в другом виде, обозначив $\frac{dr}{ds}=y$, (очевидно, что $\frac{d^2r}{ds^2}=\frac{dy}{ds}$):

$$v^2 r\frac{dy}{ds}+\left(v^2-\frac{\mu}{r}\right)\left(y^2-1\right)=0,$$

$$\frac{dy}{ds}=-\left(\frac{1-y^2}{r}\cdot\frac{v^2-\frac{\mu}{r}}{v^2}\right),$$

$$\frac{dy}{ds}=\left(\frac{1-y^2}{r}\right)\left[2a_\tau s+\mu\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right)\right]\Big/\left[2a_\tau s+\mu\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{r_0}\right)\right].$$

Найдем также зависимость угла истинной аномалии ϑ от длины дуги s:

$$1=\left(\frac{dr}{ds}\right)^2+r^2\left(\frac{d\vartheta}{ds}\right)^2 \quad\Rightarrow\quad \frac{d\vartheta}{ds}=\frac{1}{r}\sqrt{1-\left(\frac{dr}{ds}\right)^2}=\frac{1}{r}\sqrt{1-y^2}.$$

Итак, мы получили систему из четырех дифференциальных уравнений первого порядка (11) для исследования движения КА под действием касательной силы тяги:

$$\begin{aligned}
&\frac{dr}{ds}=y,\\
&\frac{dy}{ds}=\left(\frac{1-y^2}{r}\right)\left[2a_\tau s+\mu\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right)\right]\Big/\left[2a_\tau s+\mu\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{r_0}\right)\right],\\
&\frac{dt}{ds}=\left[2a_\tau s+\mu\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{r_0}\right)\right]^{-1/2},\\
&\frac{d\vartheta}{ds}=\frac{1}{r}\sqrt{1-y^2}.
\end{aligned} \qquad (11)$$

Здесь r_0 – радиус-вектор в начальный момент времени (радиус начальной круговой орбиты), r – текущее значение радиус-вектора в момент времени t, a_τ – касательное ускорение, обеспечивающее разгон КА, s - переменная длина дуги, μ – гравитационный параметр Земли.

Результаты численных расчётов динамики полета КА, разгоняющегося под действием касательной силы тяги (с начальным радиус-вектором $r(0)=r_0=7\cdot10^6$ м, $y(0)=0$, начальным временем $t(0)=0$, начальным углом истинной аномалии $\vartheta(0)=0$, начальной круговой скоростью $v_0=\sqrt{\mu/r_0}$, заданным ускорением a_τ) при его движении в плоскости орбиты Oxy, сопоставлялись с приближенными оценками Бэттина [1], описывающими расстояние от притягивающего центра до КА в момент достижения второй космической скорости, пройденный аппаратом путь до этого момента и количество витков, совершенных КА до этого момента, а также время, которое КА затратил на разгон:

$$r_{esc} = \frac{r_0 v_0}{\left(20 a_\tau^2 r_0^2\right)^{\frac{1}{4}}}\ , \tag{12}$$

$$s_{esc} = \frac{v_0^2}{2a_\tau}\left[1 - \frac{1}{v_0}\left(20 a_\tau^2 r_0^2\right)^{1/4}\right], \tag{13}$$

$$N_{esc} = \frac{v_0^2}{8\pi a_\tau r_0}\left(1 - \frac{\sqrt{20} a_\tau r_0}{v_0^2}\right), \tag{14}$$

$$t_{esc} = t_0 + \left[1 - \left(\frac{20 a_\tau^2 r_0^2}{v_0^4}\right)^{1/8}\right], \tag{15}$$

На рис. 1 изображена траектория КА при $a_\tau = 0.005\,\text{м}/\text{с}^2$. На рис. 2 построены зависимости $t_{esc}\left(a_\tau\right)$ на интервале ускорений $a_\tau \in \left[0.005, 0.5\right]\text{м}/\text{с}^2$, полученные с помощью численного метода (сплошная линия) и с использованием приближенных формул (пунктирная линия). Аналогичные зависимости были получены для $r_{esc}\left(a_\tau\right)$, $s_{esc}\left(a_\tau\right)$, $N_{esc}\left(a_\tau\right)$. Рассчитаны относительные погрешности (отклонение результатов, полученных с помощью численного метода и приближенных формул). На основе этого выявлен диапазон применимости приближенных формул.

Таким образом, сравнение численного решения точных уравнений движения с приближенными оценками [1] позволяет указать область применимости последних при различных параметрах задачи – величинах касательной тяги, радиусах начальной круговой орбиты и требуемых точностей определения времени разгона и расстояния, на котором достигается скорость ухода.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00634а).

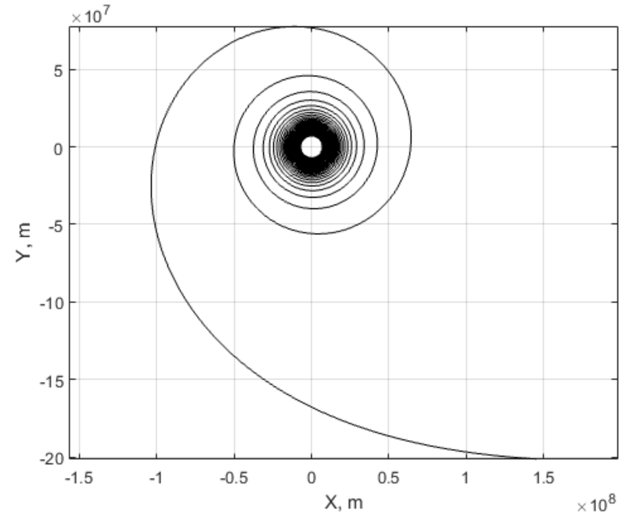
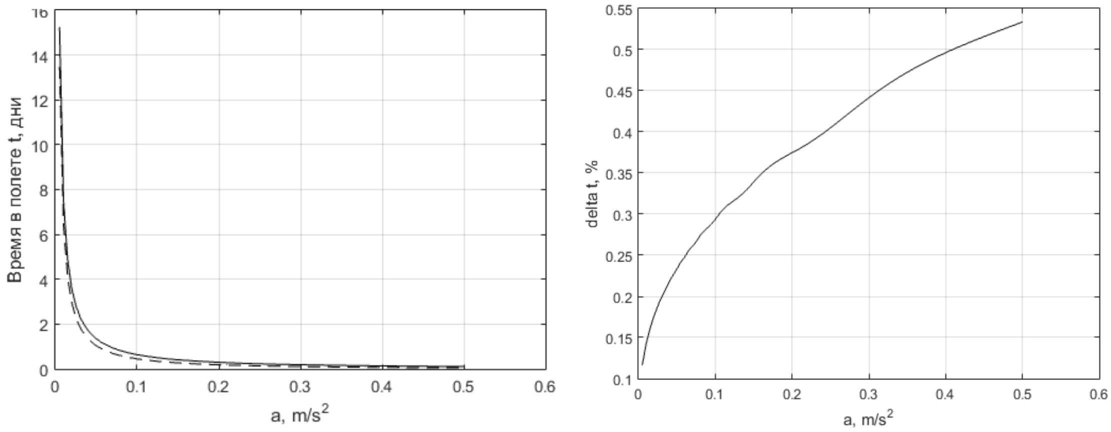


Рис. 1. Траектория движения КА при $a_\tau = 0.005\,\text{м}/\text{с}^2$ до момента достижения параболической скорости



а) б)

Рис. 2 а) $t_{esc}\left(a_{\tau}\right)$ - численный (сплошная линия) и приближенный (пунктирная линия) метод; б) Относительная погрешность.

Литература

1. *Battin Richard H*. An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics. AIAA Inc. Publ.,1999.