

Описание крайних лучей конусов сумм квадратов

М.Н. Вялый^{1,2}, А.Г. Ключиков¹

¹ Московский физико-технический институт (государственный университет)

²Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН

Аннотация

В работе исследованы конуса сумм квадратов, в частности, их крайние лучи. Рассматривается теория пространства вычетов $R/(x^2-1)$ элементы которого взаимно однозначно соответствуют полилинейным многочленам. Другое описание этого пространства состоит в том, что это пространство функций на булевом кубе (булевы значения ± 1). Представление такой функции в виде полилинейного многочлена - это фактически разложение Фурье (мономы отвечают характерам). Далее были поставлены две двойственные задачи конического программирования на конусах $\mathcal{A}_{n,d}$ и $\mathcal{A}_{n,d}^*$. Для конуса $\mathcal{A}_{n,d}^*$ был получен критерий того, что квадрат линейной функции лежит на его границе. Также выяснено, что либо линейная функция обращается в 0 в одной из точек булева куба, и тогда на ней обращается в 0 линейный функционал значения, который задает грань старшей размерности конуса сумм квадратов линейных функций. Такому функционалу соответствует неотрицательно определенная матрица ранга 1. Либо крайние лучи конуса сумм квадратов лежат на гранях, задаются матрицами ранга 2.

1. Конуса Лассера

В комбинаторной оптимизации одним из важнейших объектов пристального изучения на данный момент являются SoS алгоритмы, основанные на суммах квадратов различных степеней. Для получения оценки Гёманса-Уильямсона $\alpha_{GW} = .87856$ для задачи MAX-CUT использовались SoS алгоритмы степени 2 [4]. И логичным является вопрос: можно ли улучшить оценку используя SoS алгоритмы больших степеней? Это открытый и очень важный вопрос имеющий тесную связь с такими гипотезами как гипотеза Хота и SSEH [1],[2]. В частности, если UGC верна, то, как показано в работе [3], то оценка алгоритма Гёманса-Уильямсона не может быть улучшена за полиномиальное время.

Поэтому также представляют интерес другие способы аппроксимации. В пункте 3 будет рассмотрена релаксация MAX-CUT как задачи, двойственной некоторой задаче конического программирования. В частности, важными случаями конусов оптимизации являются конусы Лассера. Геометрия этих конусов и будет рассмотрена в этом пункте. Сформулируем как они определяются и определим некоторые важные понятия, которые будут использоваться в дальнейшем.

Через $\mathcal{R}_{n,d}$ обозначается линейное пространство многочленов от n переменных степени $\leq d$. Через $\mathcal{R}_{n,d}^*$ — двойственное пространство линейных функционалов. Говоря о пространстве линейных функционалов стоит упомянуть про функционал значения. С каждой точкой $a \in \mathbb{R}^n$ связан функционал значения $Eva : \mathcal{R}_{n,d} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$Eva(f) = f(a).$$

Поскольку всякий многочлен полностью задается своими значениями в конечном числе точек, то функционалы значения Eva порождают всё пространство $\mathcal{R}_{n,d}^*$.

В пространстве $\mathcal{R}_{n,d}^*$ определим конус неотрицательных многочленов \mathcal{C}_d , порождённый Ev_a , $a \in \mathbb{R}^n$, $a \geq 0$. Тогда, как нетрудно видеть, двойственный конус \mathcal{C}_d^* состоит из неотрицательных многочленов степени не превосходящей d . Как правило, d берется чётным, поскольку никакой ненулевой многочлен нечетной степени не может быть неотрицательным.

Среди неотрицательных многочленов нас будут особенно интересовать многочлены, которые могут быть представлены суммой квадратов. Такие многочлены также образуют конус \mathcal{S}_d . Соответственно, двойственный ему $\mathcal{S}_d^* = \mathcal{L}_d \subset \mathcal{R}_{n,d}^*$. При этом, поскольку $\mathcal{S}_d \subset \mathcal{C}_d^*$, то конус \mathcal{L}_d содержит \mathcal{C}_d , т.е. является его аппроксимацией, которая называется *аппроксимацией Лассера*. Соответственно, конуса \mathcal{S}_d , \mathcal{C}_d и им сопряженные называются *конусами Лассера*.

В задачах на графах целевая функция оптимизационной задачи формулируется с помощью характеристических $\{\pm 1\}^N$ векторов (в частности, в интересующей нас задаче MAX-CUT, где речь идет о разрезе графа). Поэтому, важным частным случаем линейных функционалов являются $Ev_a \in \mathcal{R}_{n,d}^*$, $a \in \{\pm 1\}^n$. Многогранник, порожденный такими функционалами, обозначается как $M_{n,d}$.

1.1. Свойства многогранника $M_{n,d}$

Утверждение 1.1. Аффинная оболочка $M_{n,d}$ задается уравнениями:

$$\varphi(x_\emptyset \equiv 1) = 1 \quad (1)$$

$$\varphi((x_i^2 - 1)f) = 0, \quad \deg(f) \leq d - 2 \quad (2)$$

Доказательство. Прежде всего, очевидно, что функционалы значения

$$Ev_a \in \mathcal{R}_{n,d}, a \in \{\pm 1\}^n$$

удовлетворяют уравнениям (1.1)-(1.2). При этом, любой функционал, удовлетворяющий этим уравнениям, однозначно задается значениями на мономах x_S , S - мультииндекс монома. Обозначим через χ_S :

$$\chi_S(x_S) = 1, \quad \chi_S(x_{S'}) = 0 \text{ при } S \neq S'$$

Выразим все такие функционалы как линейные комбинации вершин многогранника $M_{n,d}$:

$$\chi_S = \frac{1}{2^n} \sum_{a \in \{\pm 1\}^n} Ev_a(x_S) \cdot Ev_a$$

Действительно,

$$\forall a \in \{\pm 1\}^n \quad Ev_a(x_S) \cdot Ev_a(x_{S'}) = Ev_a(x_{S \Delta S'}),$$

а также

$$\sum_{a \in \{\pm 1\}^n} Ev_a(x_S) = 0 \text{ при } S \neq \emptyset, \text{ а при } S = \emptyset \text{ сумма равна } 1.$$

Поэтому любой функционал удовлетворяющий уравнениям (1.1)-(1.2) выражается как аффинная комбинация Ev_a , $a \in \{\pm 1\}^n$ \square

Для понимания соотношений между конусами Лассера и многогранником задачи MAX-CUT полезно следующее утверждение:

Утверждение 1.2. Пусть d -четно. Тогда пересечение конуса \mathcal{C}_d с пространством решений (1.1)-(1.2) совпадает с многогранником $M_{n,d}$.

Доказательство. Возьмем функционал φ , лежащий в пересечении \mathcal{C}_d и пространства решений (1.1)-(1.2). Тогда, из утверждения 1.1, он представляется в виде выпуклой комбинации функционалов значений:

$$\varphi = \sum_{a \in \mathcal{A}} p_a E v_a, \quad \sum_{a \in \mathcal{A}} p_a = 1, \quad p_a > 0 \quad \forall a$$

Возьмем первые координаты u_a точек $a \in \mathcal{A}$. Пользуясь полученным разложением функционала φ и (1.2), получаем:

$$\varphi((x_1^2 - 1)^2) = \sum_{a \in \mathcal{A}} p_a (u_a^2 - 1)^2 = 0$$

Так как $p_a \geq 0$, то $\forall a \in \mathcal{A} \quad u_a^2 = 1$. Аналогично доказываются и остальные координаты точек. Следовательно, $\mathcal{A} \subseteq \{\pm 1\}^n$ и значит $\varphi \in M_{n,d}$.

Обратное включение следует из определений $M_{n,d}$ и (1.1)-(1.2). \square

Далее также понадобится следующая важная лемма:

Лемма 1.1 $\varphi \in \partial K^*$ тогда и только тогда, когда $\exists x \in K : \varphi(x) = 0$.

Доказательство. \Leftarrow Пусть $\varphi(x) = 0, x \in K, \varphi \in K^*$. Обозначим через ψ любой функционал, для которого $\psi(x) < 0$. Тогда для любого $\epsilon > 0$ имеем $(\varphi + \epsilon\psi)(x) < 0$, то есть $\varphi + \epsilon\psi \notin K^*$, откуда следует $\varphi \in \partial K^*$.

\Rightarrow Пусть $\varphi(x) > 0$ для всех $x \in K$. Тогда для любого ψ и достаточно малого ϵ получаем $(\varphi + \epsilon\psi)(x) > 0$ для всех $x \in K$. Для любой нормы шар в конечномерном пространстве компактен. Рассмотрев ψ из норменной сферы и применив компактность, получим, что φ лежит во внутренней части K^* . \square

1.2. Сравнение конусов

Так как в этом пункте речь пойдет о сравнении конусов, для упрощения обозначений будем считать $M_{n,d}$ как конус, натянутый на многогранник, определенный в утверждении 1.1.

Как было показано ранее

$$M_{n,d} \subset \mathcal{C}_d \subset \mathcal{L}_d$$

В целях лучшего понимания работы SoS алгоритмов старших степеней, полезно исследовать геометрию этих конусов при разных параметрах.

Пусть $k < d$. Возникает естественный вопрос: как сравнивать конусы \mathcal{C}_k и \mathcal{C}_d ? Есть два стандартных приема:

- Поднять \mathcal{C}_k в пространство $\mathcal{R}_{n,d}^*$.
- Спроецировать \mathcal{C}_d в пространство $\mathcal{R}_{n,k}^*$.

Существует пара естественных отображений:

- Вложение $\iota : \mathcal{R}_{n,k} \rightarrow \mathcal{R}_{n,d}$ сохраняющее вид многочлена.

Его сопряженное: $\iota^* : \mathcal{R}_{n,d}^* \rightarrow \mathcal{R}_{n,k}^*$ задается ограничением функционала φ на многочлены степени не выше k : $\iota^* \varphi(f) = \varphi(\iota f)$

- Проекция $\pi : \mathcal{R}_{n,d} \rightarrow \mathcal{R}_{n,k}$ отсекающая мономы старших степеней.
Его сопряженное: $\pi^* : \mathcal{R}_{n,k}^* \rightarrow \mathcal{R}_{n,d}^*$. Аналогично, $\pi^* \varphi(f) = \varphi(\pi f)$.

Утверждение 1.3. $M_{n,d} \subset \iota^* \mathcal{L}_d \subseteq \mathcal{L}_k$

Доказательство. Предположим $\deg(f) \leq \frac{k}{2}$ и $\varphi \in \mathcal{L}_d$. Тогда, по определению сопряженного оператора:

$$\iota^* \varphi(f^2) = \varphi(\iota f^2) \geq 0 \Rightarrow \iota^* \varphi \in \mathcal{L}_k$$

Второе включение доказано. Чтобы показать первое включение отметим, что $E v_a$ проектируется в $E v_a$. \square

Теперь сравним границы этих конусов.

Всякий функционал значения $E v_a$ порождает крайний луч как конуса \mathcal{C}_d , так и \mathcal{L}_d . Действительно, определим $p(x) = (b^T x)^2$, где $b : (b^T a) = 0$. Тогда $p \in \mathcal{S}_d \subset \mathcal{C}_d^*$. Значит, по лемме 1.1, т.к. $E v_a(p(x)) = 0$, то $E v_a \in \partial \mathcal{C}_d$ и $E v_a \in \partial \mathcal{L}_d$.

Таким же образом доказываются аналогичное утверждение для π .

1.3. Матричное представление конусов Лассера

Общий способ задать линейный изоморфизм между пространством V и пространством функционалов V^* заключается в том, чтобы определить на V метрику, то есть скалярное произведение. Тогда любому вектору в V соответствует линейный функционал $\langle y, \cdot \rangle$ и это соответствие задает линейный изоморфизм.

Аналогичный изоморфизм получается при задании скалярного произведения на пространстве функционалов.

Определим скалярное произведение на $\mathcal{R}_{n,d}$ и линейный изоморфизм в том смысле как описано выше. Тогда конуса \mathcal{S}_d и \mathcal{L}_d становятся двойственными конусами в евклидовом пространстве.

Далее введем матричное представление конусов \mathcal{L}_d .

Функционалу $\varphi \in \mathcal{R}_{n,2d}^*$ взаимно однозначно соответствует билинейная форма F на пространстве многочленов $\mathcal{R}_{n,d}$, задающаяся формулой

$$F(f, g) = \varphi(fg)$$

Функционал $\varphi \in \mathcal{L}_{2d}$ тогда и только тогда, когда квадратичная форма F неотрицательно определена, т.е. квадратичная форма F является неотрицательно определенной матрицей.

Будем представлять квадратичные формы неотрицательно определенными матрицами в базисе, задаваемом мономами x^α , $|\alpha| \leq d$, где α - мультииндекс, равный $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Модуль мультииндекса означает ничто иное как сумму индексов $|\alpha| = \sum_i \alpha_i$.

Формы, соответствующие функционалам из $\mathcal{R}_{n,2d}^*$, удовлетворяют следующим уравнениям на матричные элементы $m_{\alpha,\beta}$:

$$m_{\alpha',\beta'} = m_{\alpha'',\beta''} \text{ при } \alpha' + \beta' = \alpha'' + \beta'' \quad (3)$$

Действительно, $F(x^{\alpha'}, x^{\beta'}) = \varphi(x^{\alpha'+\beta'}) = \varphi(x^{\alpha''+\beta''}) = F(x^{\alpha''}, x^{\beta''})$.

Обозначим пространство решений (1.3) через L . Тогда матричное представление конуса Лассера \mathcal{L}_d является пересечением конуса $\text{SDP} \cap L$.

Вернемся к скалярному произведению. На пространстве матриц есть классическое скалярное произведение Фробениуса $\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A^T B) = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij}$. Так как выше было описано вложение $\mathcal{R}_{n,2d}^* \rightarrow \mathcal{R}_{n,d} \times \mathcal{R}_{n,d}^*$, то возможно перенести скалярное произведение Фробениуса на $\mathcal{R}_{n,d}^*$.

Выразим его в двойственном мономиальном базисе ${}^\alpha x$, определяющимся как ${}^\alpha x(x^\beta) = \delta_{\alpha\beta}$, где $\delta_{\alpha\beta}$ - символ Кронекера. Тогда матричные элементы формы, отвечающей двойственному мономи, имеют вид:

$${}^\alpha m_{\beta,\gamma} = \delta_{\alpha,\beta+\gamma}.$$

Скалярное произведение Фробениуса в таком базисе считается следующим образом:

- $\langle {}^{\alpha'} x, {}^{\alpha''} x \rangle = \sum_{\beta,\gamma} {}^{\alpha'} m_{\beta,\gamma} {}^{\alpha''} m_{\beta,\gamma} = \sum_{\beta,\gamma} \delta_{\alpha',\beta+\gamma} \delta_{\alpha'',\beta+\gamma} \neq 0$, если $\alpha' = \alpha''$
- $\langle {}^{\alpha'} x, {}^{\alpha''} x \rangle = \sum_{\beta,\gamma} {}^{\alpha'} m_{\beta,\gamma} {}^{\alpha''} m_{\beta,\gamma} = \sum_{\beta,\gamma} \delta_{\alpha',\beta+\gamma} \delta_{\alpha'',\beta+\gamma} = Q_\alpha$, если $\alpha' = \alpha'' = \alpha$, где Q_α - количество вариантов разложений $\alpha = \beta + \gamma$, $|\beta| \leq d$, $|\gamma| \leq d$

Таким образом,

$$Q_\alpha = \text{Num}\{(\beta_1, \dots, \beta_n) : \sum_i \beta_i = d, \beta_i \leq \alpha_i, \alpha_0 = 2d - \sum_i \alpha_i\}$$

Перепишав по формуле включений и исключений, получим выражение для Q_α :

$$Q_\alpha = \sum_{S \subseteq \{0, \dots, n\}} (-1)^{|S|} \binom{n+d-\alpha(S)}{n}, \quad \alpha(S) = \sum_{i \in S} (\alpha_i + 1), \quad \alpha_\emptyset = 0. \quad (1.4)$$

Соответственно, искомый изоморфизм двойственного пространства $\mathcal{R}_{n,2d}^*$ и пространства $\mathcal{R}_{n,2d}$, определенный этим скалярным произведением, имеет следующий вид:

$${}^\alpha x \rightarrow Q_\alpha x^\alpha,$$

поскольку верно

$${}^\beta x(Q_\alpha x^\alpha) = \delta_{\alpha\beta} Q_\alpha = \langle {}^\beta x, {}^\alpha x \rangle.$$

Соответствующее скалярное произведение на пространстве многочленов имеет вид

$$\langle x^\alpha, x^\beta \rangle = \frac{1}{Q_\alpha} {}^\alpha x(x^\beta).$$

Определим теперь как соотносятся при выбранном изоморфизме пространств конуса \mathcal{L}_{2d} и \mathcal{S}_{2d} .

Для начала, сформулируем следующий общий факт о двойственности конусов, которые лежат в некотором подпространстве пространства.

Утверждение 1.4. Пусть V - подпространство евклидова пространства W , C_V - выпуклый конус в V , являющимся сечением выпуклого конуса в объемлющем пространстве $C_V = C_W \cap V$. Тогда двойственный конус $C_V^* \subset V$ совпадает с ортогональной проекцией $\Pi_V C_W^*$.

Доказательство. Двойственный конус в подпространстве V - это пересечение V с двойственным конусом в пространстве W .

Поскольку $(C_1 \cap C_2)^* \equiv C_1^* \oplus C_2^*$, то

$$(C_W \cap V)^* = C_W^* \oplus V^*.$$

Так как

$$(C_W^* \oplus V^*) \cap V = \Pi_V C_W^*,$$

то отсюда напрямую следует

$$C_V^* = C_V^* \cap V = (C_W^* \oplus V^*) \cap V = \Pi_V C_W^*. \quad \square$$

Утверждение 3.5. При выбранном отождествлении $\mathcal{R}_{n,2d}^*$ и $\mathcal{R}_{n,2d}$ имеет место включение $\mathcal{L}_{2d} \subset \mathcal{S}_{2d}$.

Доказательство. Как было показано выше, имеет место равенство $\mathcal{L}_{2d} = \text{SDP} \cap L$.

Пользуясь утверждением 1.4, получаем следующие отношения:

$$\mathcal{S}_{2d} = \mathcal{L}_{2d}^* = \Pi_L \text{SDP} \supset \text{SDP} \cap L = \mathcal{L}_{2d},$$

где второе равенство получается как раз из утверждения 1.4.

В условии утверждения включение строгое, поскольку не имеет места равенство. Действительно, предположим $\mathcal{L}_{2d} = \mathcal{S}_{2d}$, т.е. $\mathcal{L}_{2d} \supseteq \mathcal{S}_{2d}$. Это значит, что $\langle f^2, g^2 \rangle \geq 0 \forall f, g$. Для нашего скалярного произведения, индуцированного матричными элементами, это не верно т.к.

$$\langle (x^2 - 1)^2, x^2 \rangle = -2\langle x^2, x^2 \rangle = -\frac{2}{Q_2} = -2 < 0 \quad \square$$

Как пример скалярного произведения, для которого выполняется $\langle f^2, g^2 \rangle \geq 0 \forall f, g$ можно взять скалярное произведение пространства \mathbb{L}^2 . Действительно

$$\langle f^2, g^2 \rangle = \int_X f^2(x)g^2(x)dx \geq 0 \quad \forall f, g$$

2. Пространство вычетов $R/(x^2 - 1)$

2.1. Задание скалярного произведения и описание пространства

Нас также интересуют функционалы, принадлежащие некоторому подпространству L^* пространства V^* , в частности функционалы из пространства решений уравнения (1.2). В таком случае, можно рассматривать скалярное произведение как некоторую билинейную форму $\langle \cdot, \cdot \rangle$, которая вырождена на аннуляторе L пространства L^* :

$$L = \{x : \varphi(x) = 0 \quad \forall \varphi \in L^*\},$$

т.е. $\langle y, x \rangle = 0 \forall x \Leftrightarrow y \in L$.

Равно как скалярное произведение задавало изоморфизм пространства многочленов с двойственным ему, для билинейной формы аналогичным образом определяется отображение:

$$\pi : y \rightarrow \langle y, \cdot \rangle \in V^* \quad (4)$$

Утверждение 2.1.

- 1) $\text{Ker } \pi = L$
- 2) $\text{Im } \pi = L^*$

Доказательство.

- 1) По определению, L - это такое множество, что любой элемент x из него и только он, удовлетворяет уравнению $\varphi(x) = 0$. Так как $\forall \varphi \exists y : \varphi \equiv \langle y, \cdot \rangle$, то

$$L = \{x : \langle y, \cdot \rangle = 0 \quad \forall y\}$$

А это и есть определение $\text{Ker } \pi$.

- 2) Следует из определения двойственного пространства к L . \square

Как уже было отмечено выше, нас интересует пространство решений уравнения (1.2). Соответственно, рассмотрим билинейную форму $\langle f, g \rangle$, которая усредняет сумму значений функции fg на булевом кубе $\{\pm 1\}^n$:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2^n} \sum_{a \in \{\pm 1\}^n} f(a)g(a) \quad (5)$$

Действительно, эта форма согласована с уравнениями (1.2), задающими линейную оболочку многогранника $M_{n,d}$ по утверждению 1.1.

Утверждение 2.2. Для любых $f, g \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ выполняются равенства

$$\langle f, (x_i^2 - 1)g \rangle = 0$$

Доказательство. Согласно (2.2) имеем

$$\langle f, (x_i^2 - 1)g \rangle = \frac{1}{2^n} \sum_{a \in \{\pm 1\}^n} f(a)(a_i^2 - 1)g(a) = \sum 0 = 0 \quad \square$$

Из утверждения 2.2 следует, что аннулятор пространства линейных форм, удовлетворяющих (1.2), порожден многочленами вида $(x_i^2 - 1)g$, соответственно, формы вида $\langle f, \cdot \rangle$ образуют $\mathcal{V}_{n,d}$ - пространство решений (1.2).

Из всего этого следует, что многочлены, отличающиеся на

$$\sum_i (x_i^2 - 1)g_i(x)$$

определяют один и тот же линейный функционал. А значит, все функционалы из пространства решений (1.2) задаются полилинейными многочленами.

Помимо этого, утверждение 2.2 доставляет вид базиса пространства полилинейных многочленов. Это введенные в пункте 1 мономы x_S . Причем, базис оказывается ортонормированным. В самом деле,

$$\langle x_{S'}, x_{S''} \rangle = \frac{1}{2^n} \sum_{a \in \{\pm 1\}^n} x_{S'}(a) x_{S''}(a) = \frac{1}{2^n} \sum_{a \in \{\pm 1\}^n} x_{S' \Delta S''}(a) \neq 0 \Leftrightarrow S' = S''.$$

Причем $\langle x_S, x_S \rangle = 1$.

Здесь и далее будем представлять функционалы, удовлетворяющие (1.2), в виде произвольных многочленов, подразумевая проекцию на пространство полилинейных многочленов $x^\alpha \rightarrow x_{supp \alpha}$, где $supp \alpha = \{i : \alpha_i \neq 0\}$. Более формально, каждый раз мы полагаем существование канонического гомоморфизма $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] \rightarrow \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]/(x_i^2 - 1)$, а полилинейные многочлены отвечают выбору базиса в кольце вычетов.

2.2. Конуса в пространстве вычетов

Обозначим $\mathcal{A}_{n,d}$ конус, состоящий из полилинейных многочленов $f \in \mathcal{R}_{n,d} : \langle f, g^2 \rangle \geq 0, deg(g) \leq \frac{d}{2}$. С учетом всего вышесказанного, имеем:

$$\pi \mathcal{A}_{n,d} = \mathcal{L}_d \cap \mathcal{V}_{n,d},$$

π - отображение, определенное в (4.1)-(2.2).

Соответственно, двойственный конус $\mathcal{A}_{n,d}^*$ порожден квадратами полилинейных многочленов степени не превосходящей $\frac{d}{2}$.

Утверждение 2.3. Если $\langle f, g^2 \rangle = 0$ для всех g степени не больше $\frac{d}{2}$, то f тождественно нулю в кольце вычетов.

Доказательство. Очевидно, что f не содержит константы. Покажем, что f также не содержит монома x_S . Пусть $p_+ = (x_{S'} + x_{S''})^2, p_- = (x_{S'} - x_{S''})^2$, где

$$|S'| \leq \frac{d}{2}, |S''| \leq \frac{d}{2}, S' \oplus S'' = S.$$

Тогда

$$p_{\pm} = (x_{S'} \pm x_{S''})^2 = x_{S'}^2 + x_{S''}^2 \pm 2x_S = 2(1 \pm x_S) \Rightarrow \langle f, 2(1 \pm x_S) \rangle = 0$$

Так как f не содержит константы, то

$$\langle f, 2(1 \pm x_S) \rangle = \langle f, \pm 2x_S \rangle = 0.$$

Значит, f не содержит монома x_S . \square

Утверждение 2.4 Конус $\mathcal{A}_{n,d}^*$ имеет полную размерность в $\mathcal{V}_{n,d}$.

Доказательство. Покажем, что любой базисный моном выражается через сумму квадратов многочленов (полилинейных в кольце вычетов). Доказательство это аналогично тому, как доказывалось утверждение 2.3.

Пусть $p_+ = (x_{S'} + x_{S''})^2$, $p_- = (x_{S'} - x_{S''})^2$, где

$$|S'| \leq \frac{d}{2}, |S''| \leq \frac{d}{2}, S' \oplus S'' = S.$$

Тогда

$$p_+ - p_- = (x_{S'} + x_{S''})^2 - (x_{S'} - x_{S''})^2 = 4x_S \Rightarrow x_S = \frac{1}{4}(p_+ - p_-),$$

где p_{\pm} - квадраты.

Таким образом, любой элемент $\mathcal{V}_{n,d}$ представляется в виде линейной комбинации элементов из $\mathcal{A}_{n,d}^*$, значит размерность $\mathcal{A}_{n,d}^*$ не меньше $\mathcal{V}_{n,d}$. Но $\mathcal{A}_{n,d}^* \subset \mathcal{V}_{n,d}$. Следовательно, их размерности совпадают. \square

Прямым следствием утверждения 2.4 является то обстоятельство, что конус $\mathcal{A}_{n,d}$ также имеет полную размерность.

Определим теперь многочлены, отвечающие $\pi^{-1}M_{n,d}$. Отметим, что функционалу значения в точке $a \in \{\pm 1\}^n$ соответствует многочлен

$$ev_a = \prod_{i=1}^n (1 + a_i x_i).$$

В самом деле,

$$\langle ev_a, g \rangle = \frac{1}{2^n} \sum_{b \in \{\pm 1\}^n} \prod_{i=1}^n (1 + a_i b_i) g(b)$$

Произведение справа не равно нулю тогда и только тогда, когда $a = b$. В этом случае

$$\langle ev_a, g \rangle = \frac{1}{2^n} 2^n g(b) = g(b).$$

Чтобы получить многочлен из $\mathcal{V}_{n,d}$, имеющий смысл функционала значения, следует спроектировать ev_a на $\mathcal{V}_{n,d}$, отсекая мономы старших степеней. Здесь и далее, под ev_a будем подразумевать именно проекции. Именно эти многочлены и являются вершинами $\pi^{-1}M_{n,d}$.

Заметим, что такая техника может быть применена к любой функции $\varphi : \{\pm 1\}^n \rightarrow \mathbb{R}$, ведь для всякой такой функции можно подобрать многочлен, дающий такие же значения на булевом кубе. Затем, найдя такой многочлен, отсекаем мономы старших степеней.

Если $\sum_{a \in \{\pm 1\}^n} \varphi(a) g^2(a) \geq 0$ для всех многочленов степени не больше d , то проекция на $\mathcal{V}_{n,d}$ многочлена f принадлежит конусу $\mathcal{A}_{n,d}$.

Теперь, определим $\psi : \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]/(x_i^2 - 1) \rightarrow \mathcal{V}_{n,d}$ проекцию, отсекающую мономы степени выше k . Тогда обозначим $\tilde{\mathcal{A}}_{n,k,d} \equiv \psi \mathcal{A}_{n,d}$. Из ортогональности мономиального базиса следует

$$\tilde{\mathcal{A}}_{n,k,d} \subseteq \mathcal{A}_{n,d}$$

Таким образом, получили следующие соотношения между конусами в пространстве вычетов:

$$\pi^{-1}M_{n,k} \subseteq \tilde{\mathcal{A}}_{n,k,d} \subseteq \mathcal{A}_{n,d}$$

и вопрос о точности аппроксимации разных степеней сводится к вопросу о сравнении этих конусов.

3. Двойственные задачи для задачи MAX-CUT

3.1. Двойственные задачи конического программирования

Как было сказано, нас интересует геометрия конусов $\mathcal{A}_{n,d}$ и $\mathcal{A}_{n,d}^*$. Однако простого описания конусов $\mathcal{A}_{n,d}$ неизвестно. Но, с другой стороны, нас интересуют не сами конусы, а решения задач оптимизации на них. В связи с этим, представляет интерес двойственная задача, которая связана с образом конуса квадратов в кольце вычетов по модулю $x_i^2 - 1$.

Запишем пару двойственных задач конического программирования:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Прямая задача на конусе } \mathcal{A}_{n,d}^* & \text{Двойственная задача на конусе } \mathcal{A}_{n,d} \\
 \xi \rightarrow \min, & \langle f, u \rangle \rightarrow \max \\
 \xi \cdot 1 - f \in \mathcal{A}_{n,d}^*, & \langle 1, u \rangle = 1, \\
 & u \in \mathcal{A}_{n,d}.
 \end{array}$$

Двойственная задача как раз и есть интересующая нас релаксация задачи линейного программирования на сложном многограннике $M_{n,d}$, отвечающей задаче MAX-CUT. Минимум в прямой задаче не меньше максимума в двойственной. В данном случае, однако, возможно куда более сильное утверждение:

Теорема о двойственности Даны два конуса оптимизации K и K^* . На них поставлены 2 двойственные задачи. Оптимумы этих задач совпадают, если конусы имеют полную размерность и хотя бы одна из задач ограничена.

Утверждение 3.1. Значения функционала в двойственной задаче ограничены.

Доказательство. Обозначим \tilde{u} - решение двойственной оптимизационной задачи. Тогда

$$\langle f, \tilde{u} \rangle \geq \langle f, u \rangle \quad \forall u \in \mathcal{A}_{n,d},$$

а так как $\langle 1, \tilde{u} \rangle = 1$, значит \tilde{u} ограничен, а следовательно и любой другой функционал. \square

Таким образом, условия теоремы двойственности выполняются и мы можем сравнивать оптимальные значения для прямых задач.

Прямая задача имеет простой геометрический смысл. Нас интересует точка пересечения конуса $\mathcal{A}_{n,d}^*$ с прямой $\{-f + \xi \cdot 1\}$. Поскольку 1 - внутренняя точка конуса $\mathcal{A}_{n,d}^*$, это пересечение является лучом и точка пересечения с границей единственная.

Заметим также, что если $f \in \mathcal{V}_{n,k}$, то и вся прямая лежит в $\mathcal{V}_{n,k}$. Поэтому для сравнения оптимумов прямых задач минимизации для $k < d$ нужно сравнивать конусы $\mathcal{A}_{n,k}^*$ и $\mathcal{A}_{n,d}^* \cap \mathcal{V}_{n,k}$.

Нас интересует точность аппроксимаций многочленами второй и четвёртой степени.

Начнём со сравнения двойственных конусов. Как было показано в предыдущем разделе, нужно сравнивать конусы $\mathcal{A}_{n,2}^*$ и $\mathcal{A}_{n,4}^* \cap \mathcal{V}_{n,2}$.

3.2. Двойственный конус $\mathcal{A}_{n,2}^*$

Этот конус порождён в $\mathcal{V}_{n,2}$ квадратами линейных многочленов, для которых в кольце вычетов $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]/(x_i^2 - 1)$ выполняется равенство

$$\left(a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i\right)^2 = \sum_{i=0}^n a_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n a_0 a_i x_i + 2 \sum_{0 < i < j \leq n} a_i a_j x_i x_j. \quad (6)$$

Сформулируем теперь теорему, определяющую критерий того, является ли некоторый квадрат многочлена элементом границы интересующего нас конуса $\mathcal{A}_{n,2}^*$.

Теорема 3.1. Пусть $f = (a_0 + \langle a, x \rangle)^2$ - некоторый квадрат. Тогда

$$f \in \partial \mathcal{A}_{n,2}^* \Leftrightarrow \forall a_j \quad |a_j| \leq \sum_{i \neq j} |a_i|.$$

Доказательство. Как отмечалось выше, всякий функционал конуса $\mathcal{A}_{n,2}$ может быть представлен неотрицательно определенной матрицей M размера $(n+1) \times (n+1)$ с одинаковыми диагональными элементами:

$$M = c \cdot \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \dots & \\ & & 1 \end{pmatrix},$$

где c - некоторая константа. Без ограничения общности, полагаем $c = 1$.

Тогда, согласно лемме 1.1

$$f \in \mathcal{A}_{n,2}^* \Leftrightarrow \exists M \sim \varphi \in \mathcal{A}_{n,2}^* : Mf = 0$$

Это верно по причине того, что матрица M - неотрицательно определенная.

В нашем случае, на M можно смотреть как на матрицу Грама для множества векторов $\{u_i\}_{i=0}^n : \|u_i\| = 1$. Тогда

$$Mf = 0 \Leftrightarrow \forall i \sum_j \langle u_i, u_j \rangle a_j = 0$$

$$\forall i \sum_j \langle u_i, u_j \rangle a_j = \langle u_i, \sum_j a_j u_j \rangle = 0 \Rightarrow \sum_j a_j u_j = 0 \quad (7)$$

Осталось доказать, что для выполнения (3.2) существование векторов $\{u_i\}_{i=0}^n : \|u_i\| = 1$ возможно тогда и только тогда, когда

$$\forall a_j \quad |a_j| \leq \sum_{i \neq j} |a_i|.$$

1) \Leftarrow

По индукции. Для $n = 1 : a_0 u_0 + a_1 u_1$. Так как $a_0 \leq a_1$ и $a_1 \leq a_0$, то $a_0 = a_1$. Тогда $u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Пусть верно при $n = k$. Покажем, что справедливо и при $n = k + 1$.

Без ограничения общности положим, что $\max_i |a_i| = |a_0|$. Определим $q = \frac{|a_0|}{\sum_{i=1}^{k+1} |a_i|} \leq 1$. Тогда

возьмем

$$u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, u_i = \begin{pmatrix} -q \\ \bar{u}_i \end{pmatrix}, i = 1, \dots, k + 1,$$

где $\bar{u}_i \in \mathbb{R}^k$, причем $q^2 + \langle \bar{u}_i, \bar{u}_i \rangle = 1$. Это значит, что модули векторов \bar{u}_i равны и, следовательно, $(1 - q^2)\bar{u}_i \in S^k$. Положим $\tilde{u}_i = (1 - q^2)\bar{u}_i$.

Итак, задача свелась к отысканию векторов $\{\tilde{u}_i\}_{i=1}^k$, $\|\tilde{u}_i\| = 1$. Но эта задача разрешима по предположению индукции.

2) \Rightarrow

Пусть $\exists |a_0| > \sum_{i=1}^n |a_i|$. В силу симметрии сферы, без ограничения общности, положим

$u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$. Обозначим за l - прямую, проходящую через 0 с направляющим вектором u_0 . Тогда $a_0 = \sum_{i=1}^n a_i \langle \pi_l(u_i), u_0 \rangle$, $\pi_l(\cdot)$ - оператор проекции на l . Но

$$|a_0| = \sum_{i=1}^n |a_i| |\langle \pi_l(u_i), u_0 \rangle| \leq \sum_{i=1}^n |a_i|,$$

что противоречит изначальному предположению.

Как итог, можно считать теорему доказанной. \square

После этой теоремы можно посмотреть на ранг матрицы M , который определяет грань конуса $\mathcal{A}_{n,2}^*$. Случай $rk(M) = 1$ соответствует квадратам, которые обнуляются, а это может не достигаться. Соответственно, вызывает интерес случай $rk(M) = 2$.

Теорема 3.2. Пусть $f = (a_0 + \langle a, x \rangle)^2 \in \partial \mathcal{A}_{n,2}^*$. Тогда найдется такая неотрицательно определенная матрица M ранга 2, что f лежит в грани, на которой обращается в 0 линейный функционал, соответствующий матрице M : $rk(M) = 2$, M - матрица Грама для векторов $\{u_i\}_{i=0}^n : \|u_i\| = 1$.

Доказательство. Чтобы доказать эту теорему нужно показать существование такой системы векторов $\{u_i\}$ из условия.

По теореме 3.1 всякий вектор из $\partial \mathcal{A}_{n,2}^*$ определяется как $f = \langle a, x \rangle^2$, $\forall a_j \quad |a_j| \leq \sum_{i \neq j} |a_i|$. То есть, нужно найти такие двумерные вектора $\{u_i\}$, что

$$a_0 u_0 + a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots = \sum_i a_i u_i = 0.$$

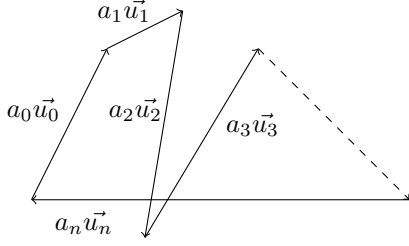


Рис. 1. "Неравенство многоугольника".

Можно, без ограничения общности, полагать, что $\forall a_i \geq 0$, ведь минус из a_i переносится в вектор u_i , у которого от подобного действия меняется только направление, но не его норма.

А это, по сути, есть "неравенство многоугольника": *у всякого многоугольника длина любой стороны не превосходит суммы длин остальных сторон.*

Оно следует непосредственно из оценки нормы суммы:

$$a_0 u_0 + a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_{n+1} u_{n+1} = 0$$

$$a_i u_i = \sum_{j \neq i} (-a_j) u_j$$

$$\|a_i u_i\| = |a_i| = \left\| \sum_{j \neq i} (-a_j) u_j \right\| \leq \sum_{j \neq i} \|(-a_j) u_j\| = \sum_{j \neq i} |a_j| \cdot \|u_j\| = \sum_{j \neq i} a_j$$

Нам следует показать возможность построения подобного многоугольника при выполнении неравенства выше. Несмотря на очевидность этого факта с физической точки зрения, докажем это математически.

Для начала определим следующие два числа: $\rho_{min}(a)$ и $\rho_{max}(a)$, $a \in \mathbb{R}^n$.

$$\rho_{min}(a) = \left\| \min_{\{u_i\}} \sum_i a_i u_i \right\|$$

$$\rho_{max}(a) = \left\| \max_{\{u_i\}} \sum_i a_i u_i \right\| = \sum_i a_i.$$

Лемма 3.1 $\forall \rho \in [\rho_{min}(a); \rho_{max}(a)] \exists \{u_i\} : \left\| \sum_i a_i u_i \right\| = \rho.$

Действительно, это напрямую следует из теоремы Больцано-Коши о промежуточном значении непрерывной функции. В качестве переменных выступают углы $\phi_{ij} = \arccos \langle u_i, u_j \rangle$.

Воспользуемся теперь индукцией. Покажем, что $\forall a \in \mathbb{R}^n$ либо $\rho_{min} = 0$, если выполняется "неравенство многоугольника" для a , либо $\rho_{min} = 2a_{max} - \sum_i a_i$.

Базовый случай для $n = 2$ очевиден: либо условие на a выполняется и тогда $a_1 \leq a_0$ и $a_0 \leq a_1$, то есть $a_1 = a_0$ и $\rho_{min}(a) = \|a_1 u_1 + a_0(-u_1)\| = 0$. Либо, например, $a_1 > a_0$ и $\rho_{min}(a) = a_1 - a_0$.

Положим, для $n = k$ утверждение верно. Тогда возьмем произвольные $a_{k+1} \geq a_k \geq \dots \geq a_0$ для которых верно неравенство многоугольника. Тогда

$$a_k \leq a_0 + \dots + a_{k+1}$$

$$2a_k - a_0 - \dots - a_k \leq a_{k+1}.$$

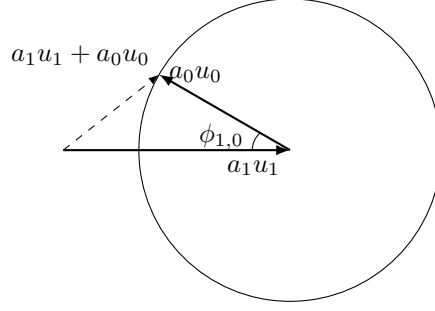


Рис. 2. Пример для $n = 2$.

Если для a_1, \dots, a_k чисел выполняется неравенство многоугольника, то $2a_k - a_0 - \dots - a_k \leq 0$.
В любом случае,

$$\left\| \sum_{i \leq k} a_i u_i \right\| \in [\min\{0; 2a_k - a_0 - \dots - a_k \leq a_{k+1}\}; a_0 + \dots + a_k],$$

но $a_{k+1} \in [0; a_0 + \dots + a_k]$.

Тогда, как было сказано выше в лемме 3.1, существует набор векторов

$$\{u_i\}_{i=0}^k : \left\| \sum_{i \leq k} a_i u_i \right\| = a_{k+1}.$$

Полагая $u_{k+1} = \frac{1}{a_{k+1}} \sum_{i \leq k} a_i u_i$, получаем искомый набор векторов.

Если же $a_{k+1} \geq a_0 + \dots + a_k$, то нетрудно проверить, рассматривая $\phi_{(k+1)i}$, $i \in \{0, \dots, k\}$, что

$$\min\left(\left(\sum_i a_i u_i\right) \cdot u_{k+1}\right) = \min\left(\sum_{i \leq k} a_i \cos \phi_{(k+1)i} + a_{k+1}\right) \in [a_{k+1} - a_0 - \dots - a_k; a_0 + \dots + a_{k+1}].$$

То есть $\rho_{\min}(a) = a_{k+1} - a_0 - \dots - a_k$. Итак, мы доказали основное утверждение индукции. Вкупе с леммой 3.1 это завершает доказательство теоремы 3.2. \square

Список литературы

1. Khot S. On the power of unique 2-prover 1-round games // Proceedings 17th IEEE Annual Conference on Computational Complexity. 2002. P. 25
2. Khot S., Vishnoi N. The unique games conjecture, integrality gap for cut problems and embeddability of negative type metrics into l_1 // Proceedings 46th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science. 2005. P. 53-62
3. Khot S., Kindler G., Mossel E., O'Donnell R. Optimal inapproximability results for MAX-CUT and other 2-variable CSPs? // Proceedings 45th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science. 2004. P. 146-154
4. Goemans M., Williamson D. 0.878 approximation algorithms for MAX-CUT and MAX-2SAT // Proceedings 26th IEEE ACM Symposium on Theory of Computing. 1994. P. 422-431