УДК 530.145

Декомпозиция неунитальных кубитных каналов

Д.В. Колобова, С.Н. Филиппов

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Одним из основных направлений квантовой теории информации является исследование квантовых каналов, то есть отображений множества матриц плотности кубита или системы кубитов на себя. На данный момент хорошо изучены свойства унитальных каналов (оставляющих инвариантным единичный оператор), тем не менее многие важные и широко используемые отображения являются неунитальными, например, обобщенное затухание амплитуды. В докладе находится явный вид декомпозиции произвольного неунитального кубитного канала, полученные результаты проиллюстрированы на примере обобщённого затухания амплитуды.

Обозначим H_2 гильбертово пространство размерности два, $B(H_2)^+$ множество положительных полуопределённых операторов над H_2. Будем называть линейное отображение $\Phi : B(H_2)^+ \to B(H_2)^+$ положительным, и также введём положительное линейное отображение $\Phi_A[\sigma] = A\sigma A^+$, где $\sigma \in B(H_2)^+$ и A положительная матрица. Как показано в статьях [1] и [2], для любого отображения Φ, являющегося внутренней точкой пространства положительных линейных отображений, существуют такие положительные матрицы A и B, что Φ может быть представлено в виде $\Phi = \Phi_B \cdot \Upsilon \cdot \Phi_A$, где Υ - унитальное отображение. Таким образом, найдя соответствующие матрицы A и B, мы можем существенно упростить исследование неунитального канала, сведя его к унитальному. Матрицы A и B выражаются через стационарную точку отображения $f(S) = \Phi(\Phi^*(S)^{-1})^{-1}$, где сопряжение понимается в смысле скалярного произведения $(Q,W) = Tr(QW)$. В частности, любое неунитальное, но сохраняющее след отображение Φ имеет следующую матричную форму в соответствующем базисе:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} Tr[\sigma_i \Phi[\sigma_j]] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ t_1 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ t_2 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ t_3 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Представив фиксированную точку отображения $f(S)$ в виде $S=\frac{1}{2}(I+\sum_{i=1}^{3}\sigma_i r_i)$ и введя новую переменную $y=1+\sum_{i=1}^{3}t_i r_i$, получаем уравнение на y и связь между y и r_i:

$$\begin{cases} \dfrac{y-1}{y}=\sum_{i=1}^{3}\dfrac{t_i^{\,2}}{\lambda_i^{\,2}-y}, \\ r_i=\dfrac{yt_i}{\lambda_i^{\,2}-y}. \end{cases}$$

Таким образом, находим стационарную точку S и выражаем через неё матрицы A и B. Как частный случай отображения Φ можно рассмотреть обобщенное затухание амплитуды, для которого $t_1=t_2=0$.

Таким образом, произвольное положительное кубитное отображение Φ сводится к унитальному отображению Υ описанным выше способом.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект № 16-11-00084) в Московском физико-техническом институте (государственном университете).

Литература

1. *Gurvits L.,* Classical complexity and quantum entanglement // J. Comput. System Sci. 2004, V. 69, P. 448.
2. *Aubrun G., Szarek S.J.,* Two proof of Srormer’s theorem // arXiv:1512.03293 [math.FA].