УДК 519.83

Вполне смешанные равновесия в марковских стратегиях в дилемме заключенного

А.В. Шкловер[1], И.С. Меньшиков[1,2]
[1]*МФТИ (ГУ),* [2]*ВЦ им. А.А. Дородницына РАН ФИЦ ИУ*

Темой доклада является исследование класса марковских стратегий в дилемме заключенного (ДЗ) и поиск соответствующих равновесий по Нэшу. В работах [1-2] были исследованы кооперативные марковские равновесия Нэша. Но, как показывают многочисленные эксперименты, проведенные, в частности, в Лаборатории экспериментальной экономики МФТИ, полная кооперация наблюдается весьма редко. В этой работе ставится задача поиска промежуточных равновесий Нэша в смешанных марковских стратегиях.

Классическая ДЗ – игра двух лиц с выигрышами:

	c	d
c	(R,R)	(S,T)
d	(T,S)	(P,P)

Предполагается, что $T>R>P>S,\ 2R\geq(T+S)$.

В модели итерационной ДЗ игра повторяется бесконечное число раз, а смешанная стратегия определяется как вектор из четырех компонент: вероятностей выбрать стратегию c в текущем повторении. Компоненты вектора соответствует четырем исходам игры в предыдущем повторении. Смешанная марковская стратегия задается так:

$$p=(p_{cc},p_{cd},p_{dc},p_{dd})=(p_1,p_2,p_3,p_4)$$

При такой формулировке задачи игра превращается в марковский процесс [3]. Модель упрощается, если предположить, что стратегии имеют вид $p=(\gamma,\alpha,\gamma,\alpha)$, т.е. игроки учитывают лишь действия соперника. Удается найти вектор инвариантных марковских мер:

$$p_i^c=\frac{\alpha_i-\alpha_j(\alpha_i-\gamma_i)}{1-(\alpha_i-\gamma_i)(\alpha_j-\gamma_j)},\ i=1,2,\ j=3-i,$$

$$v=(p_1^c p_2^c,\ p_1^c(1-p_2^c),(1-p_1^c)p_2^c,(1-p_1^c)(1-p_2^c)).$$

Определим векторы выигрышей по состояниям: $u_1=(R,S,T,P),\ u_2=(R,T,S,P)$.

Тогда поиск равновесий Нэша сводится к задаче $\alpha_i,\beta_i=\arg\max(u_i,v),\ i=1,2.$

Будем исследовать функцию выигрыша игрока 1

$$(u_1,v)=(R-S-T+P)p_1^c p_2^c+(S-P)p_1^c+(T-P)p_2^c+P$$

Исследование разбивается на два случая: равен ли старший коэффициент 0, или нет. Первый случай назовем особым, а второй – общим.

В особом случае многообразие равновесий Нэша задается отрезком прямой $\alpha-\gamma=\dfrac{S-P}{T-P}$, $0\leq\alpha,\gamma\leq1$.

В общем случае многообразие равновесий Нэша задается куском гиперболы:

$$(R-S)\alpha^2+(T-P)\gamma^2-(R-S+T-P)\alpha\gamma+(2T-R-P)\alpha+(S-T)\gamma-(S-P)=0,$$

$$0\leq\alpha,\gamma\leq1.$$

Оказывается, что при $T=10,\ R=5,\ P=1,\ S=0$ полученное многообразие равновесий Нэша в смешанных марковких стратегиях хорошо согласуется с результатами экспериментов.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантом РФФИ 16-01-00633А.

Литература

1. *Press W., Dyson F.* Iterated Prisoner's Dilemma contains strategies that dominate any evolutionary opponent // PNAS, 2012.
2. *Akin E.* Good Strategies for the Iterated Prisoner's Dilemma // arXiv, 2013.
3. *Булинский А.В., Ширяев А.Н.* Теория случайных процессов // М.: Физматлит, 2005.