УДК 534.11

Колебания неоднородной упругой системы с граничной нагрузкой

***Л.Д. Акуленко*[1,2], *А.А. Гавриков*[2]**

[1]Московский физико-технический институт (государственный университет)
[2]Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

Пусть движение механической системы описывается уравнением типа
$$(p(x,D)u'(x,t))' + r(x,D)u(x,t) = F(x,t)$$
с соответствующими начальными и краевыми условиями, где D — оператор дифференцирования по времени, и к системе применено граничное или распределенное управление F. Предлагается использовать метод разделения переменных и, исследовав собственные колебания, свести задачу построения управления к проблеме моментов (модальный подход) [1]. На начальном этапе исследований решается задача построения математической модели управляемой системы. Рассмотрим следующую самосопряженную краевую задачу на собственные значения (СЗ) и функции
$$\begin{gathered}(p(x,\lambda)u')' + r(x,\lambda)u(x,t) = 0, \quad 0 < x < l, \quad \lambda \in \Lambda, \\ \alpha_x(\lambda)p(x,\lambda)u'(x) - (-1)^{x/l}\beta_x(\lambda)u(x) = 0, \alpha_x, \beta_x \ge 0, \alpha_x + \beta_x > 0, x = 0, l,\end{gathered} \tag{1}$$
где $p(x,\cdot) \ne 0$ (жесткость) и $r(x,\cdot)$ (распределенная характеристика упругости и инерции) — кусочно-дифференцируемые на интервале $[0,l^*]$ функции, $l^* = l + \delta,\ \delta > 0$; функции $p(\cdot,\lambda)$, $r(\cdot,\lambda),\ \alpha_0(\lambda),\ \alpha_l(\lambda),\ \beta_0(\lambda),\ \beta_l(\lambda)$ — непрерывно-дифференцируемые по параметру λ. Будем называть СЗ задачи (1) такие вещественные λ, что существует нетривиальное кусочно-гладкое решение задачи (1), называемое собственной функцией, $u, pu' \in PC_1(0,l^*)$. Предполагается, что спектр задачи дискретен.

Пусть $\lambda^{(0)}$ — начальное приближение. Опишем итерационную процедуру нахождения СЗ: 1) требуется найти решение задачи Коши $(p(x,\lambda^{(0)})u'_{(0)})' + r(x,\lambda^{(0)})u_{(0)} = 0$, с начальными условиями $u_{(0)}(0) = 1$, $p(0,\lambda^{(0)})u'_{(0)}(0) = \alpha_0^{-1}(\lambda^{(0)})\beta_0(\lambda^{(0)})$, если $\alpha_0 \ne 0$, или $p(0,\lambda^{(0)})u'_{(0)}(0) = 1$, $u_{(0)}(0) = \beta_0^{-1}(\lambda^{(0)})\alpha_0(\lambda^{(0)})$, если $\beta_0 \ne 0$; 2) найти ближайший к *l* (или *n*-й, если известен номер СЗ *n*) корень $\xi^{(0)}$ уравнения $\alpha_l(\lambda^{(0)})p(x,\lambda^{(0)})u'_{(0)}(x) + \beta_l(\lambda^{(0)})u_{(0)}(x) = 0$; 3) вычислить следующее приближение по формуле ($\varepsilon^{(0)} = (l - \xi^{(0)})/l$)
$$\begin{gathered}\lambda^{(1)} = \lambda^{(0)} - \varepsilon^{(0)} l M^{(0)} / N^{(0)}, \quad M^{(0)} = p(u'_{(0)})^2(\xi^{(0)}) + ru_{(0)}^2(\xi^{(0)}), \\ N^{(0)} = -\int_0^{\xi^{(0)}} p'_\lambda(\lambda^{(0)},x)(u'_{(0)})^2(x)dx + \int_0^{\xi^{(0)}} r'_\lambda(\lambda^{(0)},x)u_{(0)}^2(x)dx + \\ +(\beta_x^{-1}(\lambda^{(0)})\beta'_{x,\lambda}(\lambda^{(0)}) - \alpha_x^{-1}(\lambda^{(0)})\alpha'_{x,\lambda}(\lambda^{(0)}))u_{(0)}(x)p(\lambda^{(0)},x)u'_{(0)}(x)\Big|_{x=0}^{x=\xi^{(0)}}.\end{gathered} \tag{2}$$
После нахождения $\lambda^{(1)}$ процедура 1)-3) повторяется.

Можно показать, что для достаточно близкого начального приближения искомого СЗ $\lambda^{(0)}$ вышеизложенная процедура сходится. Более того, можно получить двустороннюю оценку $\lambda^{(j)} < \lambda < \lambda^{(j)}$ для некоторых *j*, *k*, причем $|\lambda^{(j)} - \lambda^{(k)}| = O(\varepsilon^\theta)$, $\theta = 2^{\min(j,k)}$.

Рассмотрим пример собственных колебаний управляемой механической системы, к исследованию задач управления которой [2] может быть применен изложенный метод. Управляемые движения струны с массой на конце описываются уравнением $\rho(x)\ddot{u} = Tu'' + F(x,t)$, где T — постоянное натяжение, F — распределенное управление, $\rho(x) = \rho_0(1 + \gamma x/l)$, $\gamma > -1$ — линейная плотность. На левом конце выполнены условия либо а) закрепления $u(0,t) = 0$, либо b) свободного конца $u'(0,t) = 0$, либо управляемые кинематические или силовые условия. На правом конце прикреплена точечная масса m и выполнено граничное условие $Tu'(l,t) = m\ddot{u}(l,t) + f_l(t)$. Переходя стандартным образом к гармоническим колебаниям, $u = ve^{i\omega t}$, $v = v(x)$, и безразмерным переменным, получим краевую задачу на собственные значения и функции

$$v'' + (1 + \gamma x)\lambda v = 0, \quad 0 < x < 1, \tag{2}$$

с краевыми условиями на левом конце а) $v(0) = 0$, b) $v'(0) = 0$, и условием $v'(1) + m(\rho_0 l)^{-1}\lambda v(1) = 0$ на правом. Здесь $\lambda = \rho_0\omega^2 l^2 / T$.

На рис. 1 приведено поведение первого собственного значения λ_1 для краевых условий а) и второго λ_2 для краевых условий b) при изменении параметра $\kappa = m(\rho_0 l)^{-1}$ от 10^{-4} до 10^3 для значений $\gamma:\ \pm 0.5,\ -0.75,\ -0.99.$

После нахождения собственных значений и функций строятся уравнения управляемого движения для коэффициентов Фурье. На основе конечномодового приближения строится решение задачи управления (например, гашения начальных колебаний [1]).

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 16-11-10343).

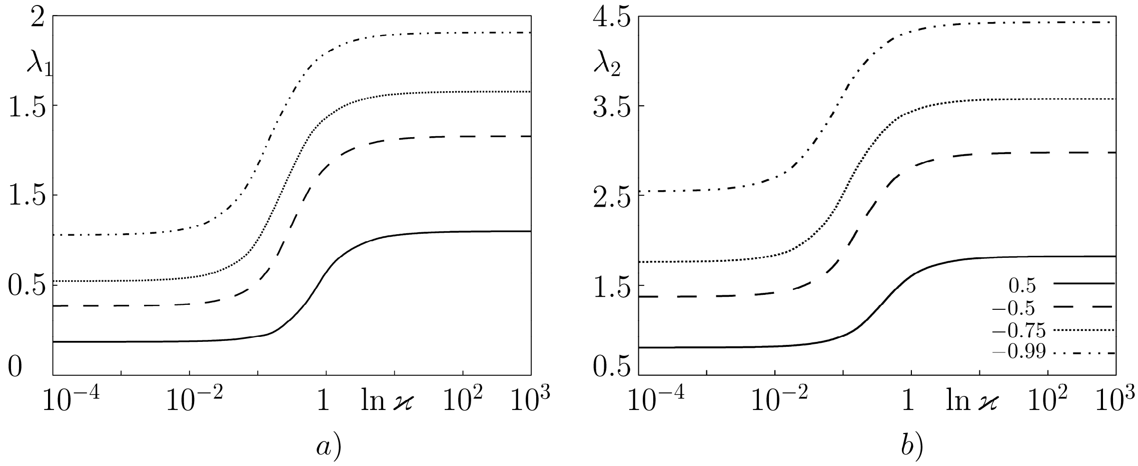

Рис. 1. Поведение собственных значений при изменении массового параметра κ.

Литература

1. *Акуленко Л.Д.* Граничное кинематическое управление распределенной колебательной системой // ПММ. 2007. Т. 71. Вып. 6. С. 956-963.

2. *Hansen S., Zuazua E.* Exact controllability and stabilization of a vibrating string with an interior point mass // SIAM J. Control Optim. 1995. V. 33. P. 1357-1391.