

Точное ограниченное управление колебаниями плоской мембраны с помощью граничного силового воздействия

И.В. Романов^{1,2}

¹Национальный исследовательский университет Высшая Школа Экономики

²Институт проблем управления РАН им. В. А. Трапезникова

Результаты работы получены совместно с А. С. Шамаевым и опубликованы в [1], [2].

Рассматривается задача точного управления системой, которая описывается смешанной задачей для уравнения колебаний плоской мембраны. Доказывается, что данную систему можно привести в покой за конечное время посредством ограниченного по абсолютной величине граничного силового воздействия.

Рассмотрим проблему управления, заданную следующей начально-краевой задачей:

$$w_{tt}(t, x) - \Delta w(t, x) = 0, \quad (t, x) \in Q_T = (0, T) \times \Omega, \quad (1)$$

$$w|_{t=0} = \varphi(x), \quad w_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} = u(t, x), \quad (t, x) \in \Sigma, \quad (3)$$

Здесь и далее $\Omega \subset R^2$ – ограниченная область с бесконечно гладкой границей, ν – внешняя нормаль к границе Ω , Σ – боковая поверхность цилиндра Q_T , $u(t, x)$ – управление, распределенное (по x) на границе Ω . Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ заданы и в дальнейшем будут указаны пространства, которым эти функции принадлежат.

Система (1) – (3) называется *приводимой в покой*, если существуют момент времени T и управление $u(t, x)$ такие, что для соответствующего решения задачи (1) – (3) выполнено:

$$w(T, x) = 0, \quad w_t(T, x) = 0.$$

Пусть ε – любое заданное положительное число. Ставится задача привести механическую систему в покой за конечное время, при условии, что на функцию управления наложено ограничение:

$$|u(t, x)| \leq \varepsilon. \quad (4)$$

Доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $\varphi(x) \in H^7(\Omega)$ и $\psi(x) \in H^6(\Omega)$ такие, что

$$\frac{\partial \varphi(x)}{\partial \nu} = 0, \quad \psi(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

Тогда найдется управление $u(t, x)$, удовлетворяющее неравенству (4), такое, что система (1) – (3) приводима в покой.

Литература

1. Romanov I., Shamaev A., Exact Bounded Boundary Zero-Controllability for the Two-Dimensional Wave Equation // Working papers by Cornell University. Series math "arxiv.org". 2016. No. arXiv: 1603.01212.

2. Романов И.В., Шамаев А.С., Точное управление колебаниями двумерной мембраны ограниченным силовым воздействием, приложенным к границе // Доклады Академии наук. 2016. Т.470, № 1. С. 22-25.