УДК 519.853.62

Решение задачи выпуклой оптимизации, возникающей при принятии решений

А.А.Лагуновская[1]

[1]Московский физико-технический институт (государственный университет)

Рассматривается следующая задача рационального индивида, являющаяся задачей выпуклой стохастической оптимизации. Данную задачу можно решать 1) с помощью опроса «экспертов» и формирования на основе их ответов оптимального решения; 2) с помощью опроса одного эксперта, который «живет» дольше.

Рассмотрим первый случай. Пусть имеется $\bar{N}$ «экспертов», каждый из которых решает одну и ту же задачу минимизации целевой выпуклой функции на выпуклом множестве

$$f(x) \to \min_{x \in Q}.$$

Каждому из экспертов доступна на каждом шаге только реализация стохастического градиента $\nabla_x f(x,\xi)$:

$$\forall x \in Q \text{ выполняется } P_\xi\left(\frac{\left\|\nabla_x f(x,\xi)\right\|_2^2}{M_2^2} \ge t\right) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^\alpha}\right),\ \alpha > 2$$

Также накладываются следующие условия на функции и ее субградиент:

$$E\left[\nabla_x f(x,\xi)\right] = \nabla f(x,\xi) \text{ и } E_\xi\left[\left\|\nabla_x f(x,\xi)\right\|_2^2\right] \le M_2^2,\ 0 \le f(x) \le M_2.$$

Считаем, что $diamQ = R$. Каждый эксперт $l = 1,...,\bar{N}$ строит последовательность $\{x^{k,l}\}$ для решения задачи выше:

$$x^{k+1,l} = \pi_Q(x^{k,l} - h\nabla f(x^{k,l},\xi^k)), \qquad (*)$$

при этом

$$\bar{x}^{\bar{N},l} = \frac{1}{\bar{N}}\sum_{l=1}^{\bar{N}} x^{k,l}$$

Согласно [1] каждый из экспертов $l = 1,...,\bar{N}$, “прожив”

$$N = \frac{2M_2^2 \mathrm{R}^2}{\varepsilon^2}$$

дней (то есть сделав такое количество итераций), гарантированно сможет найти такой $\bar{x}^{N,l}$, что

$$E\left[f\left(\bar{x}^{N,l}\right)\right] - \min_{x \in S_n(1)} f(x) \le \varepsilon,$$

Пусть далее $\sigma \gg N^{-1}$. Тогда для решения с вероятностью $\ge 1-\sigma$ задачи

$$f\left(\bar{x}^{\bar{N}}\right) - f^* \le \varepsilon$$

требуется $\ln\sigma^{-1}$ таких экспертов. И общие затраты, таким образом, равны

$$N = \frac{2M_2^2 \mathrm{R}^2 \ln\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\varepsilon^2}.$$

Во втором случае с вероятностью $\ge 1-\sigma$ такой долгоживущий эксперт найдет решение задачи

$$f\left(\tilde{x}^k\right) - f^* \le \varepsilon,$$

где $\tilde{x}^k = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x^{\bar{N},i}$, $x^{\bar{N},i}$ - выдача i – перезапуска процесса (*), запуски считаются независимыми; $k = C_1 \ln\left(\frac{1}{\sigma}\right)$. Тогда общее число итераций будет равно

$$\bar{N} = C_2 \frac{2M_2^2 \mathrm{R}^2 \ln\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\varepsilon^2},$$

$C_1, C_2 \sim 1-10$.

Таким образом, можно сделать вывод, что общие затраты примерно одинаковы (с точностью до мультипликативной константы) в обоих вариантах.

Литература

1. Гасников А.В., Крымова Е.А., Лагуновская А.А., Усманова И.Н., Федоренко Ф.А. Стохастическая онлайн оптимизация. Одноточечные и двухточечные нелинейные многорукие бандиты. Выпуклый и сильно выпуклый случаи // Автоматика и Телемеханика. 2017. (в печати)