УДК 519.63

Численное тестирование метода осреднения в задаче о распространении волн цунами над неровным дном. Одномерная модель

Д.А. Караева
Московский физико-технический институт (государственный университет)

Дифференциальные уравнения, возникающие при применении методов математической физики к практическим задачам, часто содержат быстроосциллирующие или быстроменяющиеся коэффициенты, что существенно затрудняет решение этих задач как численными, так и аналитическими (в частности, асимптотическими) методами. В такой ситуации разумным способом представляется применение к задаче тех или иных методов осреднения, суть которых заключается в том, что исходное уравнение приводится некоторыми преобразованиями к уравнению, коэффициенты которого уже не являются быстроменяющимися.

По методам осреднения имеется обширная литература (см., например, монографию [1] или статью [2], где можно найти дальнейшие ссылки). В основном существующие методы осреднения применимы в том случае, когда коэффициенты исходных уравнений являются периодическими функциями «быстрых переменных», т.е. (в простейшем варианте) имеют вид $f(x, x/\varepsilon)$, где функция $f(x,y)$ 2π-периодична по быстрым переменным y, а ε – малый параметр, задающий скорость осцилляции коэффициентов.

К сожалению, представимость коэффициентов в таком виде – довольно ограничительное условие, которое не всегда выполняется. Примером может служить рассматриваемая в докладе задача о распространении волн цунами в океане. В линейном приближении уравнений мелкой воды эта задача приводит к волновому уравнению

$$u_{tt} = \left(\nabla, c^2(x)\nabla\right)u$$

с некоторыми начальными условиями для возвышения свободной поверхности $u = u(x,t)$. Здесь скорость распространения волн $c(x)$ связана с глубиной океана в точке $x = (x_1, x_2)$ соотношением

$$c^2(x) = gD(x),$$

где $D(x)$ – глубина океана в точке x. Таким образом, в реальной задаче скорость распространения волн может оказаться весьма нерегулярной функцией (ибо дно имеет достаточно хаотические неровности), и нет никаких разумных оснований ожидать, что ее можно представить, как периодическую функцию от быстрых переменных.

Метод осреднения, позволяющий работать с уравнениями такого рода, был предложен в [3]. В простейшем варианте, при определенных соотношениях между имеющимися в задаче малыми параметрами (отношения длины волны и горизонтального масштаба осцилляций дна к размеру бассейна, а также отношение вертикального масштаба осцилляций к глубине), он приводит в качестве осредненного уравнения к волновому уравнению, в котором квадрат скорости заменен на его усреднение

$$\left\langle c^2(x)\right\rangle = \int \varphi(\xi)c^2(x+\beta\xi)d\xi,$$

где β - малый параметр, зависящий от исходных малых параметров задачи, а ядро усреднения $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям

$$\int \varphi(z)dz = 1, \qquad \int \varphi(z)z^{\alpha}\,dz = 0$$

при $|\alpha| > 0$.

Целью данной работы является тестирование предложенного в [3] метода на примере указанной выше задачи в модельном одномерном случае (волновое уравнение на отрезке с локализованными начальными данными). Функция $D(x)$ моделировалась по реальным данным следующим образом: выбирался некоторый приближенно прямолинейный отрезок в акватории мирового океана, и батиметрия вдоль этого отрезка использовалась для задания функции $D(x)$. Таким образом, исследование оказывается настолько приближенным к реальной задаче, насколько это вообще возможно для одномерного случая. Данный этап тестирования являлся предварительным, и по его результатам было принято решение продолжить тестирование на реальной батиметрии в двумерном случае (см. доклад А. Караева).

Отметим, что при решении задачи на основе реальных данных точные значения исходных малых параметров не имеют физического смысла и, следовательно, не могут быть определены. В их отношении имеет смысл говорить лишь о порядке величины. Соответственно параметр усреднения β не может быть определен чисто теоретическим путем, и его необходимо подбирать. Критерием качества при его выборе служит погрешность решения при замене исходного уравнения осредненным. В качестве меры этой погрешности использовалась величина

$$\Delta^2 = \frac{J^2(u_R - u_a)}{J^2(u_R)},$$

где u_R – численное решение исходной задачи, u_a – численное решение усредненной задачи, а $J^2(t) = (\|u_t\|^2 + \|c\nabla u\|^2)$ – интеграл энергии. Для численного решения использовались методы из [4]. В качестве критерия «хорошей согласованности» решений было выбрано условие $\Delta \simeq 0.3$.

На рис. 1 показан профиль исходного и усредненного дна для участка мирового океана длиной порядка 2000 км вблизи побережья Японии. Пунктирная линия соответствует усреднению исходного профиля (отмеченного на рис. 1 светлой непрерывной линией) с малым параметром $\beta \simeq 0.03$. Погрешность решения волнового уравнения при этом составляет $\Delta = 0.34$.

Таким образом, нами было получено усреднение быстроменяющейся функции скорости, а также численное решение задачи Коши для волнового уравнения в одномерном случае с усредненной функцией, хорошо согласующееся с решением исходной задачи. При этом полученная усредненная функция скорости (как в частности видно из рис. 1) является более или менее плавно меняющейся. Одномерный случай является простейшим для данной задачи, а потому целью дальнейших исследований является проверка теории для больших размерностей.

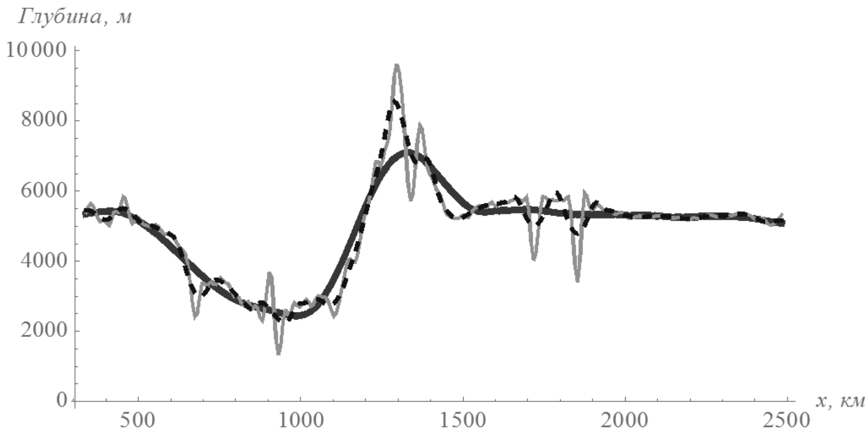

Рисунок 1. Батиметрия на выбранном отрезке океанского дна вблизи побережья Японии. Светлой непрерывной линией отмечена реальная глубина. Пунктирной линией – усреднение с малым параметром $\beta \simeq 0.03$. Темной непрерывной линией – усреднение с малым параметром $\beta \simeq 0.12$.

Автор признателен своему научному руководителю В.Е. Назайкинскому за постановку задачи и ценные советы.

Литература

1. *Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.* Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.
2. *Брюнинг Й., Грушин В.В., Доброхотов С.Ю*. Осреднение линейных операторов, адиабатическое приближение и псевдодифференциальные операторы // Математические заметки. 2012. Т. 92. № 2. С. 163–180.
3. *Доброхотов С.Ю., Назайкинский В.Е., Тироцци Б.* О методе осреднения для дифференциальных операторов с осциллирующими коэффициентами // Доклады академии наук. 2015. Т. 461. №5. С. 516–520
4. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.