УДК 519.63

Подбор параметров метода осреднения в задаче о распространении волн цунами над неровным дном. Двумерный случай

А.Д. Караев
Московский физико-технический институт (государственный университет)

В докладе рассматривается задача о распространении длинных волн (в частности, волн цунами) в акватории океана. В линейном приближении уравнений мелкой воды и в рамках «поршневой» модели генерации цунами [1,2] она описывается задачей Коши для волнового уравнения с переменной скоростью вида

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - div(c^2(x)grad(u)) = 0, \\ u\big|_{t=0} = u_0(x), \qquad u_t\big|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Здесь скорость распространения волны имеет вид $c^2(x) = gD(x)$, где $D(x)$ – переменная глубина океана, g – ускорение свободного падения, а $u_0(x)$ – начальная форма возвышения свободной поверхности, возникающая благодаря мгновенному подъему (или опусканию) океанского дна в эпицентре землетрясения. Благодаря неровности поверхности дна мирового океана, глубина является, вообще говоря, быстроменяющейся функцией, и для эффективного решения такой задачи как численными, так и асимптотическими методами целесообразно вначале применить к задаче процедуру осреднения, сводя ее тем самым к задаче, коэффициенты которой уже не являются быстроменяющимися. Метод осреднения, пригодный для задач такого вида (в которых осциллирующие коэффициенты не могут быть выражены как периодические функции «быстрых переменных») был разработан в [3] (там же можно найти ссылки на классические работы по теории осреднения дифференциальных уравнений). В простейшем случае (который только и рассматривается здесь) осредненная задача отличается от исходной лишь заменой коэффициента $c^2(x)$ на осредненный коэффициент, который вычисляется по следующей формуле:

$$\mathrm{E}_\varepsilon[c^2](x) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \varphi(\xi) c^2(x+\varepsilon\xi) d\xi\ ,$$

где ε – малый параметр, зависящий от средней ширины пиков дна, а ядро свертки $\varphi(\zeta)$ – функция из пространства Шварца, обладающая следующими свойствами:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} \varphi(x) x^\alpha dx = \begin{cases} 1, & \alpha = 0 \\ 0, & 0 < |\alpha| \le n. \end{cases}$$

Такую функцию будем называть ядром Соболева порядка n. Порядок ядра Соболева выбирается в зависимости от требуемой точности в осредненном уравнении.

Предложенный в [3] метод был оттестирован на модельных одномерных задачах и показал удовлетворительные результаты (см. доклад Д.А. Караевой). В данной работе мы продолжаем тестирование метода на реальной батиметрии океана в двумерном случае. Проводится сравнение численных решений исходной и осредненной задачи Коши с целью подобрать оптимальные значения малого параметра ε в зависимости от выбранного региона мирового океана. Под оптимальностью подразумевается высокая точность решения осредненного уравнения вкупе с уменьшением осцилляций исходной скорости волны. Точность характеризуется относительной погрешностью

$$\delta = \frac{\Im[u_{исходное} - u_{усредненное}]}{\Im[u_{исходное}]}\ ,$$

где

$$\Im^2[u] = \iint\limits_{\mathbb{R}^n} [u_t^2(x,t) + (c(x)\nabla u(x,t))^2] dx$$ – интеграл энергии решения,

в то время как требуемая «гладкость» усредненного коэффициента определяется визуально. Полученные результаты продемонстрированы в докладе на примере реальных регионов мирового океана с визуализацией результата осреднения, решений исходной и осредненной задач вместе с вычисленными погрешностями и их анализом.

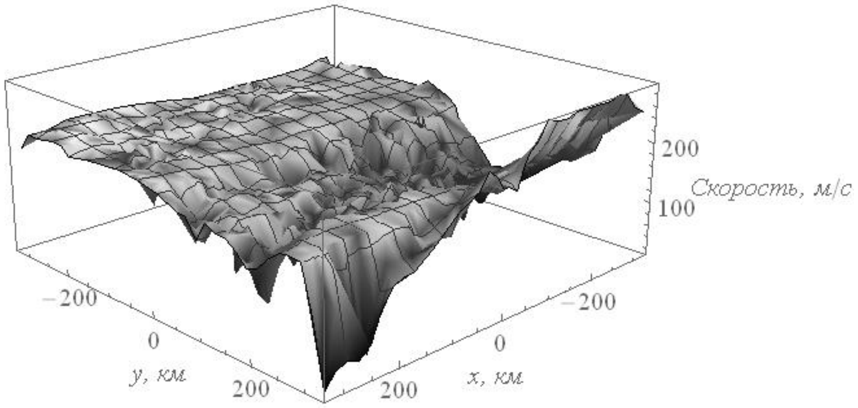

Рисунок 1. График *c(x)* в квадратном регионе вблизи побережья Японии

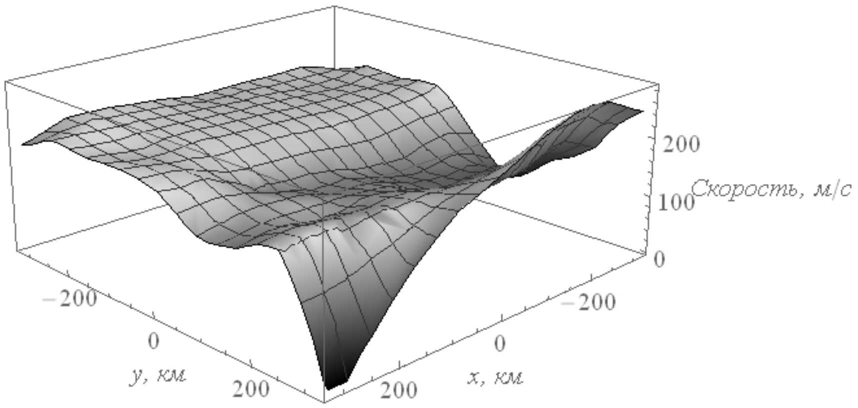

Рисунок 2. График осреднённой *c(x)*, параметр ε = 4.5 км, тот же участок. Для усреднения использовалось ядро Соболева 4-го порядка.

Автор признателен своему научному руководителю В.Е. Назайкинскому за постановку задачи и ценные советы.

Литература

1. *Stoker J.J.* Water Waves: The Mathematical Theory with Applications. New York: John Wiley and Sons, 1958. 609 с.
2. *Пелиновский Е.Н.* Гидродинамика волн цунами. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 1996. 276 с.
3. *Доброхотов С.Ю., Назайкинский В.Е., Тироцци Б.* О методе осреднения для дифференциальных операторов с осциллирующими коэффициентами // Доклады академии наук. 2015. Том 461. №5. С. 516–520.