УДК 537.112

Электронный вакуум и уравнения Максвелла

О.В. Белянин
Московский физико-технический институт (государственный университет)

Введение

Рассмотрим модель возбуждений электронного вакуума, основанную на объяснении аналогии между уравнениями электромагнитного поля в вакууме и диэлектрике:

Вакуум:	Диэлектрик:	
$div\,\boldsymbol{D} = \rho$	$div\,\boldsymbol{P} = -\rho_{pol}$	(1)
$rot\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$	$rot\,\boldsymbol{M} = \boldsymbol{j}_{pol} - \dfrac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}$	(2)
$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}$	$\boldsymbol{P} = \alpha\varepsilon_0 \boldsymbol{E}$	(3)
$\boldsymbol{H} = \dfrac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{M} = \dfrac{\varkappa}{\mu\mu_0}\boldsymbol{B}$	(4)

Как известно, справедливость этих уравнений для диэлектрика обеспечивается поляризацией и прецессией молекул-диполей в электромагнитном поле (1). При этом молекула является своеобразной пружиной, препятствующей растяжению в электрическом поле. Представим, что электроны в вакууме находятся в смешанном состоянии $\psi \sim (e - \bar{e})/\sqrt{2}$ (ни электрон, ни позитрон). Для объяснения эффекта «пружины» предположим, что существует короткодействующее квантовое поле, посредством которого электронная и позитронная части смешанного состояния взаимодействуют друг с другом. Потенциал взаимодействия в некоторой области считаем гармоническим $V \sim m{\omega_0}^2 r^2/2$.

1 Одночастичная матрица плотности

Для вывода основных уравнений используется метод одночастичной матрицы плотности в приближении Хартри-Фока (2). Определение одночастичной матрицы плотности через статистический оператор $\hat{\rho}$:

$$\widehat{\aleph}_1 = \sum_{n',n''} Tr(\hat{a}^+(n')\hat{a}(n'')\hat{\rho})\hat{a}^+(n'')\hat{a}(n') \tag{5}$$

С помощью матричных элементов $\widehat{\aleph}_1$ можно получить выражения для среднего значения и эволюции физических величин в смешанном координатно-импульсном представлении. Пусть оператор физической наблюдаемой G является операторной функцией $\hat{G} = G(\hat{x}, \hat{p})$, тогда для среднего G в смешанном представлении будет справедлива формула:

$$\begin{gathered}\langle \hat{G} \rangle = \int G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})\aleph_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})dxdp \\ G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}) = \int \delta(\boldsymbol{q})\big(G(\boldsymbol{x}, -i\hbar\boldsymbol{\nabla})\big)e^{\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{pq}}dq\end{gathered} \tag{6}$$

Это позволяет трактовать величину

$$g(\boldsymbol{x}) = \int G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})\aleph_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})dp \tag{7}$$

как локальную плотность наблюдаемой G. Уравнение эволюции для матричных элементов матрицы плотности в координатно-импульсном представлении:

$$\frac{\partial\aleph_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},s',s'')}{\partial t} = -\frac{\boldsymbol{p}}{m}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\aleph_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},s',s'') + (a) \tag{8}$$

$$\begin{gathered}(a) = W\aleph_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},s',s'') \\ W = \frac{1}{i\hbar}U\left(\boldsymbol{x} + \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}}, \boldsymbol{p}, \hat{\boldsymbol{s}}'\right) + (b) \\ (b) = -\frac{1}{i\hbar}U\left(\boldsymbol{x} - \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}}, -\boldsymbol{p}, \hat{\boldsymbol{s}}''^*\right)\end{gathered} \tag{9}$$

Если физическая величина G и член гамильтониана, связанный с взаимодействием, не зависят от импульса и спина, можно определить оператор плотности потока величины G:

$$\hat{\boldsymbol{j}}_G = \hat{G}\frac{\widehat{\boldsymbol{p}}}{m}\widehat{\aleph} \tag{10}$$

2 Модельный гамильтониан электрон-позитронной пары.

В дальнейших выкладках используются индексы 1 – для позитрона, 2 – для электрона. Рассмотрение уравнений движения ведется в координатах центра масс электрон-позитронной пары:

$$\boldsymbol{R} = \frac{(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2)}{2}; \ \boldsymbol{V} = \frac{(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2)}{2}; \ S = s_1 + s_2 \tag{11}$$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2; \ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2; \ s = s_1 - s_2 \tag{12}$$

– здесь s_1, s_2 – спины частиц.

В нерелятивистском приближении функция Лагранжа после перехода к обобщенным координатам и приведения к виду, содержащему только напряженности поля (1), а также отбрасывания членов высоких порядков малости по параметру $\lambda_x^{r_d} = \frac{r_d}{\Lambda}$ (Λ – характерный пространственный масштаб изменения электромагнитного поля, r_d– характерный размер пары электрон-позитрон), будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{gathered} L = m\boldsymbol{V}^2 + \frac{m\boldsymbol{v}^2}{4} + \boldsymbol{r}e\big(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R}) + \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{R})\big) + (a) \\ (a) = -\mu_B \boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{r}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{R}}\right)\boldsymbol{B}(\boldsymbol{R}) - 2\mu_B \boldsymbol{s}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{R}) - \frac{m{\omega_0}^2}{4}\boldsymbol{r}^2 \end{gathered} \tag{13}$$

Обобщенные импульсы:

$$\boldsymbol{P} = 2m\boldsymbol{V} - e\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{R}); \quad \boldsymbol{p} = \frac{m\boldsymbol{v}}{2} \tag{14}$$

Соответствующий функции Лагранжа (13) оператор Гамильтона электрон-позитронной пары:

$$\begin{gathered} \hat{H} = \frac{1}{4m}\left(\hat{\boldsymbol{P}} + e\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{R})\right)^2 + \frac{1}{m}\hat{\boldsymbol{p}}^2 + (a) \\ (a) = -\boldsymbol{r}e\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R}) + \mu_B \hat{\boldsymbol{S}}\left(\boldsymbol{r}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{R}}\right)\boldsymbol{B}(\boldsymbol{R}) + (b) \\ (b) = 2\mu_B \hat{\boldsymbol{s}}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{R}) + \frac{m{\omega_0}^2}{4}\boldsymbol{r}^2 \end{gathered} \tag{15}$$

В дальнейших выкладках для простоты опускается член спин-орбитального взаимодействия $\mu_B \hat{\boldsymbol{S}}\left(\boldsymbol{r}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{R}}\right)\boldsymbol{B}(\boldsymbol{R})$.В работе мы также будем применять операторы скоростей, определенные как:

$$\hat{\boldsymbol{v}}_1 = \frac{1}{m}\big(\hat{\boldsymbol{p}}_1 - e\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1)\big); \ \hat{\boldsymbol{v}}_2 = \frac{1}{m}(\hat{\boldsymbol{p}}_2 + e\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_2)) \tag{16}$$

$$\hat{\boldsymbol{V}} = \frac{1}{2m}\left(\hat{\boldsymbol{P}} + e\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{R})\right); \ \hat{\boldsymbol{v}} = \frac{2\hat{\boldsymbol{p}}}{m} \tag{17}$$

Уравнение эволюции для матрицы частиц двух сортов $\aleph_{12}$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{V}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{R}} + \boldsymbol{v}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} - W\right)\aleph_{12} = 0 \tag{18}$$

3 Плотность заряда и электрическое смещение.

Рассмотрим операторы заряда и плотности заряда поляризации для рассматриваемой нами системы:

$$\begin{gathered} \hat{Q}_{12} = e\sum_{\boldsymbol{x}} \hat{a}_1{}^+(\boldsymbol{x})\hat{a}_1(\boldsymbol{x}) - e\sum_{\boldsymbol{x}} \hat{a}_2{}^+(\boldsymbol{x})\hat{a}_2(\boldsymbol{x}) \\ \hat{\rho}_p = \hat{\hat{Q}}_1\hat{\aleph}_1 + \hat{Q}_2\hat{\aleph}_2 \end{gathered} \tag{19}$$

Плотность заряда в обобщенных координатах равна (1):

$$\begin{gathered} \rho_p(\boldsymbol{x}) = -\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(e\sum_{S,s}(a)\right) \\ (a) = \int \frac{r_\beta}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1 + (-1)^n}{(n+1)!}\left(\frac{r_\alpha}{2}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right)^n \aleph_{12}dPdrdp \end{gathered} \tag{20}$$

Величина $e\sum_{S,s}\int \frac{r_\beta}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{(n+1)!}\left(\frac{r_\alpha}{2}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right)^n \aleph_{12}dPdrdp$ представляет собой электрический момент единицы объема в разложении по мультиполям.

Вокруг каждой заряженной частицы формируется облако из поляризованных электрон-позитронных пар. Сделаем предположение, что объемный заряд свободных частиц ρ полностью экранируется объемным зарядом поляризованного вакуума ρ_p:

$$\rho = -\rho_p, \qquad \boldsymbol{j} = -\boldsymbol{j}_p \tag{21}$$

При этом условии электрический момент единицы объема соответствует понятию электрического смещения:

$$D_\beta(\boldsymbol{x}) = e\sum_{S,s}(a)$$
$$(a) = \int \frac{r_\beta}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{(n+1)!}\left(\frac{r_\alpha}{2}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right)^n \aleph_{12}\,dPdrdp \tag{22}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}D_\alpha(\boldsymbol{x}) = \rho(\boldsymbol{x},t) \tag{23}$$

4 Плотность тока

В случае взаимодействия с электромагнитным полем необходимо вместо $\frac{\hat{\boldsymbol{p}}}{m}$ подставлять в (10) оператор скорости. Тогда оператор плотности тока поляризации имеет вид:

$$\hat{\boldsymbol{j}}_p = \hat{Q}_1\hat{\boldsymbol{v}}_1\hat{\aleph}_1 + \hat{\hat{Q}}_2\hat{\boldsymbol{v}}_2\hat{\aleph}_2 \tag{24}$$

В обобщенных координатах выражение для матричного элемента приводится к виду:

$$j_{p_\beta}(x) = -\int V_\beta\, div\, \boldsymbol{D}(\boldsymbol{x},P)dP + en\bar{v}_\beta + (a)$$
$$(a) = \frac{e}{4}\sum_{S,s}\int v_\beta r_\gamma \frac{\partial}{\partial x_\gamma}(b)dPdrdp \tag{25}$$
$$(b) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{n!}\left(\frac{r_\alpha}{2}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right)^{n-1}\aleph_{12}$$

5 Уравнение баланса для электрического смещения и напряженность магнитного поля

Уравнение непрерывности для матричного элемента электрического смещения:

$$\frac{\partial}{\partial t}D_\beta + \int V_\gamma \frac{\partial}{\partial R_\gamma}D_\beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{P})dP - e\bar{v}_\gamma n + (a) = 0$$
$$(a) = -\frac{e}{4}\sum_{S,s}\int (b)dPdrdp$$
$$(b) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{(n+1)!}(c) \tag{26}$$
$$(c) = \left(v_\beta r_\gamma\frac{\partial}{\partial x_\gamma} + n r_\beta v_\gamma \frac{\partial}{\partial x_\gamma}\right)\left(\frac{r_\alpha}{2}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right)^{n-1}\aleph_{12}$$

С помощью выражения для плотности тока (25) и формул векторного анализа данное выражение приводится к виду:

$$\boldsymbol{j}_p = \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{D} + rot\,\boldsymbol{M} \tag{27}$$

$$\boldsymbol{M} = \int(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{P})\times\boldsymbol{V})dP + (a)$$
$$(a) = -\frac{e}{4}\sum_{S,s}\int(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})(b)\aleph_{12}dPdrdp \tag{28}$$
$$(b) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{(n+1)!}n\left(\frac{\boldsymbol{r}}{2}\cdot\nabla\right)^{n-1}$$

Величина $\boldsymbol{M}$ является магнитным моментом единицы объема, обусловленного орбитальным движением электронов и позитронов. Как видно, магнитный момент состоит из членов, обусловленных внешним и внутренним движением электрон-позитронной пары:

$$\boldsymbol{M}_{ext} = \int(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x},P)\times\boldsymbol{V})dP \tag{29}$$

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{M}_{int} = -\frac{e}{4}\sum_{S,s}\int(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})(b)\aleph_{12}dPdrdp \\
(b) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{(n+1)!}n\left(\frac{\boldsymbol{r}}{2}\cdot\nabla\right)^{n-1}
\end{gathered}
\tag{30}
$$

Для того чтобы уравнение (27) приобрело вид уравнения Максвелла, необходимо подставить в него вместо тока поляризации вакуума ток свободных зарядов и положить $\boldsymbol{H} = -\boldsymbol{M}$.

6 Формулы для электрической и магнитной постоянных

Идея получения формул для электрической и магнитной постоянных состоит в определении уровней энергии электрон-позитронной пары в электромагнитном поле и использовании квантовой статистики. Малость параметра $\lambda_x^{r_d}$ позволяет ограничиться решением для постоянных в окрестности точки R напряженностей электрического и магнитного полей. В целях простоты опускается член спин-орбитального взаимодействия $\mu_B\widehat{\boldsymbol{S}}\left(\boldsymbol{r}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{R}}\right)\boldsymbol{B}(\boldsymbol{R})$. Для решения стационарного уравнения Шредингера с гамильтонианом (15) применяется методика Ландау (3). После замен $\psi = \chi\, e^{-\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{PR}}$, $\omega_L = \frac{e}{m}B$, $\omega_1 = ({\omega_0}^2 + {\omega_L}^2)^{\frac{1}{2}}$ и $x_0 = 2e\left(E_x - \frac{P_y}{2m}B\right)/m{\omega_1}^2$, $y_0 = 2e\left(E_y + \frac{P_x}{2m}B\right)/m{\omega_1}^2$, $z_0 = 2eE_z/m{\omega_0}^2$ получаем для уровней энергии:

$$
\begin{gathered}
E = 2\mu_B s_z B + \frac{P^2}{4m} + (a) \\
(a) = -\frac{e^2{E_{L_x}}^2}{m{\omega_1}^2} - \frac{e^2{E_{L_y}}^2}{m{\omega_1}^2} - \frac{e^2{E_{L_z}}^2}{m{\omega_0}^2} + (b) \\
(b) = \left(n_x + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_1 + \left(n_y + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_1 + (c) \\
(c) = \left(n_z + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0
\end{gathered}
\tag{31}
$$

Электрон-позитронные пары подчиняются статистике Ферми. Для термодинамического потенциала небольшой окрестности точки R с объемом Vможно записать (4):

$$
\begin{gathered}
\Omega(\boldsymbol{R},V) = -kT\sum_{S_z,s_z}\sum_{n_x=0}^{\infty}\sum_{n_y=0}^{\infty}\sum_{n_z=0}^{\infty}\int\ln(Z)\frac{VdP}{(2\pi\hbar)^3} \\
Z = 1 + \exp\left(\left(\mu - (2\mu_B s_z B + \frac{P^2}{4m} + (a)\right)/kT\right) \\
(a) = -\frac{e^2{E_{L_x}}^2}{m{\omega_1}^2} - \frac{e^2{E_{L_y}}^2}{m{\omega_1}^2} - \frac{e^2{E_{L_z}}^2}{m{\omega_0}^2} + (b) \\
(b) = \left(n_x + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_1 + \left(n_y + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_1 + \left(n_z + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0)
\end{gathered}
\tag{32}
$$

Будем полагать, что выполняется условия $\frac{e^2{E_L}^2}{m{\omega_0}^2} \ll \mu$, $\hbar\omega_L \ll \mu$. Тогда влияние силы Лоренца на термодинамический потенциал будет выражаться просто:

$$
\Omega(\boldsymbol{R},V,E_L) = \Omega(\boldsymbol{R},V,0) - N\frac{e^2{\boldsymbol{E}_L}^2}{m{\omega_0}^2}
\tag{33}
$$

Для электрического момента единицы объема получаем

$$
\boldsymbol{P} = \boldsymbol{D} = -\frac{1}{V}\frac{\partial\Omega}{\partial\boldsymbol{E}_L}\bigg|_{T,V,\mu} = \frac{2ne^2}{m{\omega_0}^2}\boldsymbol{E}_L
\tag{34}
$$

Откуда следует формула для электрической постоянной:

$$
\varepsilon_0 = \frac{2ne^2}{m{\omega_0}^2}
\tag{35}
$$

Для получения диамагнитной намагниченности, можно воспользоваться выражением

$$
\boldsymbol{M}_{dia} = \boldsymbol{M}_{int} = -\frac{1}{V}\frac{\partial\Omega}{\partial\boldsymbol{B}}\bigg|_{T,V,\mu}
\tag{36}
$$

$$\boldsymbol{M}_{dia} = -n(\frac{2}{3}N_F + 1)\hbar\frac{e^2}{m^2\omega_0}\boldsymbol{B} \quad (37)$$

где $N_F = \langle n_x + n_y + n_z \rangle$ – средний колебательный уровень. Таким образом, магнитная постоянная равна:

$$\mu_0 = \frac{m^2\omega_0}{\hbar n e^2(\frac{2}{3}N_F + 1)} \quad (38)$$

С помощью выражения для скорости света получаем выражение:

$$mc^2 = (\frac{1}{3}N_F + \frac{1}{2})\hbar\omega_0 \quad (39)$$

Разрыв пары электрон-позитрон должен с наибольшей вероятностью происходить при резонансе. С учетом основного вклада в реакцию двух γ-квантов с частотой ω_0 можно оценить значение N_F:

$$mc^2 = \hbar\omega_0, \qquad N_F = \frac{3}{2} \quad (40)$$

Для магнитной постоянной окончательно получаем:

$$\mu_0 = \frac{m^2\omega_0}{2\hbar n e^2} \quad (41)$$

Плотность электрон-позитронных пар:

$$n = \frac{m{\omega_0}^2\varepsilon_0}{2e^2} = \frac{m^3c^4\varepsilon_0}{2e^2\hbar^2} = \frac{m^3c^2}{2e^2\hbar^2\mu_0} \quad (42)$$

Вычисление дает величину $9{,}47 \cdot 10^{37}\text{м}^{-3}$. Среднее расстояние между электрон-позитронными парами:

$$r_n = n^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{2e^2\hbar^2}{m^3c^4\varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{3}} = \lambda_C\left(\frac{\alpha}{\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 0.09\lambda_C \quad (43)$$

Итак, мы получили выражения для электрической и магнитной постоянных и материальные соотношения:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D} &= \varepsilon_0(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{V}\times\boldsymbol{B}) \\ \boldsymbol{B} &= \mu_0(\boldsymbol{H} - \boldsymbol{V}\times\boldsymbol{D}) \end{aligned} \quad (44)$$

Уравнения (44) приводят к зависимости уравнений для потенциала от обобщенной скорости «потока» вакуума V. Требование неизменности скорости света означает, что скорость «потока» вакуума равна нулю в любой системе отсчета. Из (14), таким образом, следует:

$$\widehat{\boldsymbol{P}} + e\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{R}) = 0 \quad (45)$$

Сравнение с (22) показывает связь между импульсом единицы объема пар электрон-позитрон и тензором энергии-импульса электромагнитного поля:

$$\boldsymbol{P} \approx -\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B} = -\frac{1}{c^2}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H} \quad (46)$$

Полученные результаты позволяют говорить о непротиворечивости на данном этапе модели и имеющихся результатов и перспективности дальнейшего исследования, способного привести к более глубокому пониманию электромагнитного поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Климонтович Ю. Л.* Кинетическая теория электромагнитных процессов. М.: Наука, 1980. с. 373.

2. *Киржниц Д.А.* Полевые методы теории многих частиц. М. : Госатомиздат, 1963. с. 344.

3. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е.М.* Краткий курс теоретической физики. Т. 2. М. : Наука, 1972. с. 368.

4. *Садовский М.В.* Лекции по статистической физике. Екатеринбург : Институт Электрофизики УрО РАН, 1999. с. 261.