УДК 519.17

Различение распределений вейбулловского типа по максимальным членам вариационного ряда

И.В. Родионов[1,2]

[1]Московский физико-технический институт (государственный университет)

[2]Московский государственный университет им М.В. Ломоносова

Проблема различения распределений с близкими хвостами встречается во многих статистических приложениях стохастической теории экстремумов, например, связанных с безопасностью (наводнения, обслуживание электростанций), финансовой сферой (задачи страхования, оптимального размера портфеля), см. [1]. Стоит заметить, что распределения умеренных (не хвостовых) значений удобно моделировать стандартными распределениями, которые отличаются от асимптотического распределения хвостов. Пусть задана выборка $(X_1,\ldots,X_n)$ из некоторого распределения с функцией распределения F. Пусть $X_{(1)} \le \ldots \le X_{(n)}$ - вариационный ряд этой выборки. Будем предполагать, что нам известно только k_n+1 максимальных членов вариационного ряда. Рассмотрим задачу различения простой гипотезы $H_0 : F = F_0$ и «левосторонней» альтернативы $H_- : F = F_-$ по k_n максимальным членам вариационного ряда выборки. Будем считать, что функции распределения F_0 и F_- имеют плотности $f_0(x)$ и $f_-(x)$ соответственно, причём

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln f_-(x)}{\ln f_1(x)} \le 1 \text{ è } \lim_{x\to\infty}\frac{\ln f_1(x)}{\ln f_0(x)} = 0$$

для некоторой плотности $f_1(x)$. Обозначим $f_0(x)=\exp(-S(x))$ и $f_1(x)=\exp(-V(x))$. Рассмотрим статистику

$$R_n = \exp\Big(\sum_{i=0}^{k_n-1}[S(X_{(n-i)}) - S(X_{(n-k_n)})] - \sum_{i=0}^{k_n-1}[V(X_{(n-i)}) - V(X_{(n-k_n)})]\Big),$$

асимптотическое распределение которой схоже с условным распределением отношения правдоподобий, построенному по гипотезам H_0 и H_1 с использованием k_n порядковых статистик, при условии $X_{(n-k_n)}$. Метод отношения правдоподобий широко применяется для различения распределений с близкими хвостами, см., например, работы [2], [3].

Теорема.
Пусть $\{k_n\}$ такая числовая последовательность, что

$$k_n \to \infty \text{ è } \frac{\sqrt{k_n}}{\ln n} \to 0 \text{ ïðè } n\to\infty.$$

Предположим также, что $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{S(x)}{x} = +\infty$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{V(x)}{x} = +\infty.$

Если гипотеза H_0 верна, то при некоторых условиях регулярности, наложенных на функции $S(x)$ и $V(x)$ верно

$$\frac{1}{\sqrt{k_n}}\left(\frac{\ln R_n \cdot S'(X_{(n-k_n)})}{S'(X_{(n-k_n)}) - V'(X_{(n-k_n)})} - k_n\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1).$$

при $n\to\infty$.

Литература

1. *A. Fereira, L. de Haan.* Extreme value theory //Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. N.Y.: Springer. 2006.
2. *D. Kundu, M.Z. Raqab.* Discriminating between the generalized Rayleigh and log-normal distribution // Statistics. 2007. Vol. 41 (6). Pp. 505-515.
3. *R.D. Gupta, D. Kundu*. Discriminating between Weibull and generalized exponential distributions // Computational Statistics and Data Analysis. 2003. V. 43 (2). Pp. 179-196.