УДК 517.984.46

Доказательство теоремы Като при помощи неравенств Карлемана

А.В. Горячевский[1,2], А.И. Комеч[2]
[1]Московский физико-технический институт (государственный университет)
[2]Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН

1 Введение

В данной работе рассматривается теорема Като, которая физически означает разрушение стационарных состояний ввиду радиационного взаимодействия с непрерывным спектром. Эта теорема имеет важнейшие приложения в линейной теории рассеяния и дисперсионного убывания, которое играет ключевую роль в современной нелинейной теории рассеяния.

Теорема Като является специальным случаем более общей теоремы Като—Агмона—Саймона [1, Theorem XIII.58].

Теорема 1.1 (Като—Агмона—Саймона) *Пусть потенциал V — функция на $\mathbb{R}^n$, такая, что*

1. *операция умножения на V — оператор, Δ-ограниченный с относительной гранью, меньшей 1, то есть*
   (a) *$D(V) \supset D(\Delta)$, где $D(A)$ — область определения оператора A;*
   (b) *для некоторых a и b из $\mathbb{R}$ и всех $\varphi \in D(\Delta)$*
   $$\|V\varphi\| \leq a\|\Delta\varphi\| + b\|\varphi\|,$$
   причем $\inf a \leq 1$.
2. *существует замкнутое множество S нулевой меры, такое, что $\mathbb{R}^n \setminus S$ связно и V ограничена на каждом компактном подмножестве в $\mathbb{R}^n \setminus S$.*

Кроме того, $V = V_1 + V_2$, где

1. *функция V_1 ограничена вне некоторого шара $\{x|\ |x| < R_0\}$ и $|x|V_1(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$;*
2. *функция V_2 ограничена вне некоторого шара $\{x|\ |x| < R_0\}$ и $V_2(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$;*
3. *если рассматривать V_2 как отображение $r \to V_2(r,\ \cdot)$ из $(0,\ \infty)$ в $L^\infty(S^{n-1})$, где S^{n-1} есть $(n-1)$-мерная сфера. то V_2 дифференцируема для $|x| > R_0$ как L^∞-значная функция и $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\, r\partial V_2/\partial r \leq 0$.*

Тогда $H = -\Delta + V$ не имеет строго положительных собственных значений.

Моделью для этой теоремы служит статья Реллиха [2]. Реллих изучал решение уравнения $(\Delta + \lambda)u = 0$ в неограниченных областях и, в частности, показал, что при $\lambda > 0$ не существует квадратично интегрируемых решений уравнения $(\Delta + \lambda)u = 0$ в области $\mathbb{R}^n \backslash \{x|\ |x| > R\}$. Отсюда вытекает, что если V имеет компактный носитель, то не существует положительных собственных значений оператора $-\Delta + V$. Эта идея была развита Като [3], который доказал частный случай теоремы [1, Theorem XIII.52] при $V_2 = 0$. Результаты, доказанные аналогичными методами для потенциалов, отталкивающих на бесконечности ($\partial V_2/\partial r < 0$ для больших r), можно найти в работах [4, 5]. Теоремы вида [1, Theorem XIII.58] (но с несколько более сильными условиями гладкости) были найдены независимо Саймоном [7] и Агмоном [8, 9]. Еще раньше этих последних статей Вейдман [10] применил методы работы Като к доказательству того, что кулоновы гамильтонианы не имеют положительных собственных значений (это было первое доказательство данного результата, который был рассмотрен в примере 5 [1, §XII.2, Example 5] и его продолжении посредством других методов). Методы Вейдмана легко обобщаются на однородные потенциалы степени $-\alpha$, $0 < \alpha < 2$. Во второй работе Агмона исследуются суммы потенциалов типа тех, что рассмотрены в теореме [1, Theorem XIII.58], и однородных потенциалов указанной степени. Техника теоремы [1, Theorem XIII.58] обобщена на системы с магнитными полями в работе [11]. Приложения этого метода для проверки того, что некоторые специальные классы n-частичных операторов не имеют собственных значений в интервале (E_0, ∞) при соответствующем $E_0 > 0$, можно найти в работе Саймона [7] и в первой работе Агмона [8].

2 Теорема Като

Мы докажем фундаментальную теорему Като об отсутствии положительных собственных значений оператора Шрёдингера

$$H\psi(x) := (-\Delta + V(x))\psi(x), \ x \in \mathbb{R}^3, \ \psi \in \mathcal{L}^2, \tag{2.1}$$

(где $\mathcal{L}^2 \equiv L^2(\mathbb{R}^3)$ и равенство понимается в смысле обобщённых функций) с достаточно быстро убывающим на бесконечности потенциалом. Положим, что для потенциала верны следующие условия [12]

$$V(x) \in C(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}), \quad \lim_{|x|\to\infty} |x||V(x)| = 0. \tag{2.2}$$

Теорема 2.1 (Като [3]) *Пусть $V(x)$ — вещественная непрерывная функция и пусть выполнено (2.2). Тогда у оператора H нет положительных собственных значений, то есть, если*

$$H\psi = \lambda\psi, \tag{2.3}$$

где $\lambda > 0$ и $\psi \in \mathcal{L}^2$, то $\psi = 0$.

Доказательство основано на 1) быстром убывании собственных функций [6, Section 3.4.4] и 2) неравенствах Карлемана [13, Section 14.7].

3 Убывание собственных функций

Сначала мы докажем следующую лемму.

Лемма 3.1 *Пусть $f(r) = (f_1(r), \dots, f_N(r)) \in L^1(1, \infty)$ — комплексная вектор-функция:*

$$\int_1^\infty |f(r)| dr < \infty. \tag{3.1}$$

Тогда

$$\varliminf_{r\to\infty} |rf(r)| = 0. \tag{3.2}$$

Доказательство. Пусть (3.2) неверно. Тогда $\exists \varepsilon > 0, \ N > 0$:

$$|rf(r)| \geq \varepsilon \text{ для } x > N$$

и интеграл

$$\int_1^\infty |f(r)| dr \geq \varepsilon \int_N^\infty \frac{dr}{r} = \infty.$$

Данное противоречие доказывает лемму. □

Заметим, что из $\psi \in \mathcal{L}^2$ вытекает $\psi \in \mathcal{H}^2$, так как $V \in C_b(\mathbb{R}^3)$ по (2.2), и

$$(-\Delta + 1)\psi(x) = (-V + \lambda + 1)\psi(x) \in \mathcal{L}^2,$$

$$F[(-\Delta + 1)\psi(x)](k) = (k^2 + 1)\hat{\psi}(k) \in \mathcal{L}^2,$$

где $F[f]$ — преобразование Фурье функции f и $\hat{\psi}(k) = F[\psi(x)](k)$.

Теперь мы покажем убывание собственных функций.

Предложение 3.2 *Пусть $\psi \in \mathcal{L}^2$ — решение* (2.3) *при $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$. Тогда при условии* (2.2) *выполнено следующее неравенство:*

$$\int \langle x\rangle^k (|\nabla\psi|^2 + |\psi|^2)dx < \infty, \ \forall k \geq 0, \ k \in \mathbb{R}, \tag{3.3}$$

где $\langle x\rangle = \sqrt{1+|x|^2}$.

Доказательство.

i) Обозначим $r = |x|$. Для $r \neq 0$ обозначим также $\psi_r = \partial_r\psi = \dfrac{x}{r}\cdot\nabla\psi(x)$. Умножая обе части (2.3) на $r\overline{\psi}_r$ и интегрируя по множеству $B_{\rho,R} = \{x \in \mathbb{R}^3, \ \rho \leq |x| \leq R\}$, мы получим

$$\int\limits_{B_{\rho,R}} r\overline{\psi}_r H\psi dx = \int\limits_{B_{\rho,R}} r\overline{\psi}_r \lambda\psi dx,$$

$$\int\limits_{B_{\rho,R}} r\overline{\psi}_r(-\Delta + V)\psi dx = \lambda \int\limits_{B_{\rho,R}} r\overline{\psi}_r\psi dx,$$

$$-\int\limits_{B_{\rho,R}} r\overline{\psi}_r\Delta\psi dx = \lambda \int\limits_{B_{\rho,R}} r\overline{\psi}_r\psi dx - \int\limits_{B_{\rho,R}} r\overline{\psi}_r V\psi dx. \tag{3.4}$$

Сначала заметим, что

$$div(r\overline{\psi}_r\nabla\psi) = r\overline{\psi}_r\Delta\psi + \nabla\psi\cdot\nabla(r\overline{\psi}_r) \tag{3.5}$$

и

$$Re[\nabla\psi\cdot\nabla(r\overline{\psi}_r)] = Re\left[\overline{\psi}_r\nabla\psi\cdot\frac{x}{r} + r\nabla\psi\cdot\nabla\overline{\psi}_r\right] =$$

$$= Re[\overline{\psi}_r\psi_r] + Re\left[r\nabla\psi\cdot\nabla\left(\nabla\overline{\psi}\cdot\frac{x}{r}\right)\right] = |\psi_r|^2 +$$

$$+Re\left[r\sum_{i=1}^3\sum_{j=1}^3 \partial_i\psi\left((\partial_i\partial_j\overline{\psi})\frac{x_j}{r} + \partial_j\overline{\psi}\partial_i\left(\frac{x_j}{r}\right)\right)\right] =$$

$$= |\psi_r|^2 + Re\left[\sum_{i=1}^3\sum_{j=1}^3 \partial_i\psi\partial_j(\partial_i\overline{\psi})x_j\right] +$$

$$+Re\left[r\sum_{i=1}^3\sum_{j=1}^3 \partial_i\psi\partial_j\overline{\psi}\left(\frac{\delta_{ij}}{r} - \frac{x_ix_j}{r^3}\right)\right]$$

$$= |\psi_r|^2 + \frac{1}{2}x\cdot\nabla|\nabla\psi|^2 + Re\left[|\nabla\psi|^2 - \left|\nabla\psi\cdot\frac{x}{r}\right|^2\right]$$

$$= |\psi_r|^2 + \frac{1}{2}x\cdot\nabla|\nabla\psi|^2 + |\nabla\psi|^2 - |\psi_r|^2$$

$$= |\nabla\psi|^2 + \frac{1}{2}r\frac{\partial}{\partial r}|\nabla\psi|^2,$$

так как

$$\frac{\partial}{\partial r} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^3 \frac{x_i}{r}\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^3 x_i\frac{\partial}{\partial x_i},$$

$$x\cdot\nabla = r\frac{\partial}{\partial r}.$$

Далее, если мы возьмём вещественную часть (3.5), то получим, что

$$Re[r\overline{\psi}_r\Delta\psi] = Re[div(r\overline{\psi}_r\nabla\psi)] - Re[\nabla\psi\cdot\nabla(r\overline{\psi}_r)]$$

$$Re[r\overline{\psi}_r\nabla\psi] = Re[div(r\overline{\psi}_r\nabla\psi)]-$$
$$-|\nabla\psi|^2 - \frac{1}{2}r\frac{\partial}{\partial r}|\nabla\psi|^2 \tag{3.6}$$

и, применяя формулу Стокса, найдем, что

$$-\int\limits_{B_{\rho,R}} Re[r\overline{\psi}_r\Delta\psi]dx$$
$$= \int\limits_{B_{\rho,R}} |\nabla\psi|^2dx + \int\limits_{B_{\rho,R}} \frac{1}{2}r\frac{\partial}{\partial r}|\nabla\psi|^2dx$$
$$- \int\limits_{|x|=R} r\overline{\psi}_r\nabla\psi\frac{x}{r}dS + \int\limits_{|x|=\rho} r\overline{\psi}_r\nabla\psi\frac{x}{r}dS$$
$$= \int\limits_{B_{\rho,R}} |\nabla\psi|^2dx + \int\limits_{B_{\rho,R}} \frac{1}{2}r\frac{\partial}{\partial r}|\nabla\psi|^2dx$$
$$- \int\limits_{|x|=R} r|\psi_r|^2dS + \int\limits_{|x|=\rho} r|\psi_r|^2dS. \tag{3.7}$$

Теперь рассмотрим второй интеграл в правой части. В сферических координатах $x = r\omega$, и мы получим

$$\int\limits_{B_{\rho,R}} r\frac{\partial}{\partial r}|\nabla\psi|^2dx = \int\limits_{|\omega|=1} d\omega \int\limits_{\rho}^{R} r^3\frac{\partial}{\partial r}|\nabla\psi|^2dr$$

$$= -3\int\limits_{|\omega|=1} d\omega\int\limits_{\rho}^{R} r^2|\nabla\psi|^2dr + \int\limits_{|x|=R} r|\nabla\psi|^2dS$$
$$- \int\limits_{|x|=\rho} r|\nabla\psi|^2dS = -3\int\limits_{B_{\rho,R}} |\nabla\psi|^2dx$$
$$+ \int\limits_{|x|=R} r|\nabla\psi|^2dS - \int\limits_{|x|=\rho} r|\nabla\psi|^2dS.$$

Первый интеграл в правой части (3.4) может быть преобразован так же:

$$\int\limits_{B_{\rho,R}} Re[r\overline{\psi}_r\psi]dx = \frac{1}{2}\int\limits_{B_{\rho,R}} r\frac{\partial}{\partial r}|\psi|^2dx$$
$$= -\frac{3}{2}\int\limits_{B_{\rho,R}} |\psi|^2dx + \frac{1}{2}\int\limits_{|x|=R} r|\psi|^2dS - \frac{1}{2}\int\limits_{|x|=\rho} r|\psi|^2dS. \tag{3.8}$$

Подставляя данное выражение и (3.7) в (3.4) и взяв вещественную часть левой и правой части, мы получим

$$
\begin{aligned}
&-\int\limits_{B_{\rho,R}} Re[r\overline{\psi}_r\Delta\psi]dx - \lambda\int\limits_{B_{\rho,R}} Re[r\overline{\psi}_r\psi]dx \\
&\qquad = -\int\limits_{B_{\rho,R}} Re[r\overline{\psi}_r V\psi]dx, \\
&\frac{1}{2}\left(-3\int\limits_{B_{\rho,R}}|\nabla\psi|^2dx + \int\limits_{|x|=R} r|\nabla\psi|^2dS - \int\limits_{|x|=\rho} r|\nabla\psi|^2dS\right) \\
&\quad + \int\limits_{B_{\rho,R}}|\nabla\psi|^2dx - \int\limits_{|x|=R} r|\psi_r|^2dS + \int\limits_{|x|=\rho} r|\psi_r|^2dS \\
&-\lambda\left(-\frac{3}{2}\int\limits_{B_{\rho,R}}|\psi|^2dx + \frac{1}{2}\int\limits_{|x|=R} r|\psi|^2dS - \frac{1}{2}\int\limits_{|x|=\rho} r|\psi|^2dS\right) \\
&\qquad = -\int\limits_{B_{\rho,R}} Re[r\overline{\psi}_r V\psi]dx, \\
&\frac{1}{2}\int\limits_{B_{\rho,R}}\left[-|\nabla\psi|^2 + 3\lambda|\psi|^2\right]dx \\
&\quad -\int\limits_{|x|=R} r\left[|\psi_r|^2 - \frac{1}{2}|\nabla\psi|^2 + \frac{1}{2}\lambda|\psi|^2\right]dS \\
&\quad +\int\limits_{|x|=\rho} r\left[|\psi_r|^2 - \frac{1}{2}|\nabla\psi|^2 + \frac{1}{2}\lambda|\psi|^2\right]dS \\
&\qquad = -\int\limits_{B_{\rho,R}} Re[r\overline{\psi}_r V\psi]dx.
\end{aligned} \tag{3.9}
$$

ii) Умножим (2.3) на $r^\gamma\overline{\psi}(x)$ и проинтегрируем по $B_{\rho,R}$:

$$\int\limits_{B_{\rho,R}} r^\gamma\overline{\psi}H\psi dx = \int\limits_{B_{\rho,R}} r^\gamma\lambda|\psi|^2dx,$$

$$-\int\limits_{B_{\rho,R}} r^\gamma\overline{\psi}\Delta\psi dx + \int\limits_{B_{\rho,R}} r^\gamma V|\psi|^2dx = \int\limits_{B_{\rho,R}} r^\gamma\lambda|\psi|^2dx. \tag{3.10}$$

Заметим, что

$$
\begin{aligned}
div[r^\gamma\overline{\psi}\nabla\psi] &= r^\gamma\overline{\psi}\Delta\psi + \nabla\left(r^\gamma\overline{\psi}\right)\cdot\nabla\psi \\
&= r^\gamma\overline{\psi}\Delta\psi + r^\gamma|\nabla\psi|^2 + \gamma r^{\gamma-1}\overline{\psi}\frac{x}{r}\cdot\nabla\psi, \\
r^\gamma\overline{\psi}\Delta\psi &= div[r^\gamma\overline{\psi}\nabla\psi] - r^\gamma|\nabla\psi|^2 - \gamma r^{\gamma-1}\overline{\psi}\psi_r.
\end{aligned}
$$

Подставляя в (3.10) и применяя формулу Стокса, мы получим

$$\int\limits_{B_{\rho,R}} \left[r^\gamma|\nabla\psi|^2 + \gamma r^{\gamma-1}\overline{\psi}\psi_r - r^\gamma\lambda|\psi|^2\right] dx$$

$$-\int\limits_{B_{\rho,R}} div[r^\gamma\overline{\psi}\nabla\psi]dx = -\int\limits_{B_{\rho,R}} r^\gamma V|\psi|^2 dx,$$

$$\int\limits_{B_{\rho,R}} div[r^\gamma\overline{\psi}\nabla\psi]dx =$$

$$\int\limits_{|x|=R} r^\gamma\overline{\psi}\nabla\psi\cdot\frac{x}{r}dS - \int\limits_{|x|=\rho} r^\gamma\overline{\psi}\nabla\psi\cdot\frac{x}{r}dS$$

$$= \int\limits_{|x|=R} r^\gamma\overline{\psi}\psi_r dS - \int\limits_{|x|=\rho} r^\gamma\overline{\psi}\psi_r dS,$$

$$\int\limits_{B_{\rho,R}} \left[r^\gamma|\nabla\psi|^2 + \gamma r^{\gamma-1}\overline{\psi}\psi_r - r^\gamma\lambda|\psi|^2\right] dx$$

$$-\int\limits_{|x|=R} r^\gamma\overline{\psi}\psi_r dS + \int\limits_{|x|=\rho} r^\gamma\overline{\psi}\psi_r dS = -\int\limits_{B_{\rho,R}} r^\gamma V|\psi|^2 dx. \tag{3.11}$$

В частности, для $\gamma = 0$ мы получим

$$\int\limits_{B_{\rho,R}} \left[|\nabla\psi|^2 - \lambda|\psi|^2\right] dx - \int\limits_{|x|=R} \overline{\psi}\psi_r dS$$

$$+\int\limits_{|x|=\rho} \overline{\psi}\psi_r dS = -\int\limits_{B_{\rho,R}} V|\psi|^2 dx. \tag{3.12}$$

Складывая (3.9) и (3.12), мы получим

$$\frac{1}{2}\int\limits_{B_{\rho,R}} \left[|\nabla\psi|^2 + \lambda|\psi|^2\right] dx$$

$$-\int\limits_{|x|=R} r\left[|\psi_r|^2 - \frac{1}{2}|\nabla\psi|^2 + \frac{1}{2}\lambda|\psi|^2\right] dS$$

$$+\int\limits_{|x|=\rho} r\left[|\psi_r|^2 - \frac{1}{2}|\nabla\psi|^2 + \frac{1}{2}\lambda|\psi|^2\right] dS$$

$$-\int\limits_{|x|=R} \overline{\psi}\psi_r dS + \int\limits_{|x|=\rho} \overline{\psi}\psi_r dS$$

$$= -\int\limits_{B_{\rho,R}} Re(r\overline{\psi}_r V\psi)dx - \int\limits_{B_{\rho,R}} V|\psi|^2 dx. \tag{3.13}$$

Рассмотрим интегралы по $|x| = R$. Обозначим

$$f_1(r) = \int\limits_{|x|=r} [|\psi_r|^2 - \frac{1}{2}|\nabla\psi|^2 + \frac{1}{2}\lambda|\psi|^2]dS(x),$$

$$f_2(r) = \int\limits_{|x|=r} \overline{\psi}\psi_r dS(x).$$

Тогда

$$\int_1^\infty |f_1(r)|dr < \infty, \quad \int_1^\infty |f_2(r)|dr < \infty,$$

так как $|\overline{\psi}\psi_r| \le \frac{1}{2}(|\overline{\psi}|^2 + |\psi_r|^2) \le \frac{1}{2}(|\psi|^2 + |\nabla\psi|^2)$ и $\psi \in \mathcal{H}^2$. Следовательно, по Лемме 3.1 существует последовательность $R_k \to \infty$, для которой

$$R_k f_1(R_k) \to 0, \qquad f_2(R_k) \to 0.$$

Следовательно, устремляя $R = R_k \to \infty$ в (3.13), мы получим

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int\limits_{|x|\ge\rho} (|\nabla\psi|^2 + \lambda|\psi|^2)dx \\ &= \int\limits_{|x|=\rho} \left[\frac{\rho}{2}(|\nabla\psi|^2 - \lambda|\psi|^2 - 2|\psi_r|^2) - \overline{\psi}\psi_r\right] dS \\ &- \int\limits_{|x|\ge\rho} Re(r\overline{\psi}_r V\psi)dx - \int\limits_{|x|\ge\rho} V|\psi|^2 dx. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Учитывая (2.2), видно, что

$$\begin{aligned} &\left|\int\limits_{|x|\ge\rho} \left(Re(r\overline{\psi}_r V\psi) + V|\psi|^2\right) dx\right| \\ &\le \varepsilon(\rho) \int\limits_{|x|\ge\rho} (|\nabla\psi|^2 + \lambda|\psi|^2)dx, \end{aligned}$$

где $\varepsilon(\rho) \to 0$ as $\rho \to \infty$. Следовательно, из (3.14) следует, что для достаточно больших ρ

$$\begin{aligned} &\int\limits_{|x|\ge\rho} (|\nabla\psi|^2 + \lambda|\psi|^2)dx \\ &\le C\left[\rho \int\limits_{|x|=\rho} (|\nabla\psi|^2 - \lambda|\psi|^2)dS - 2\int\limits_{|x|=\rho} \overline{\psi}\psi_r dS\right]. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Интегрируя по $\rho \ge r_1$, получим

$$\begin{aligned} &\int\limits_{|x|\ge r_1} (|x| - r_1)(|\nabla\psi|^2 + \lambda|\psi|^2)dx \\ &\le C \int\limits_{|x|\ge r_1} r(|\nabla\psi|^2 - \lambda|\psi|^2)dx \\ &-2C \int\limits_{|x|\ge r_1} \overline{\psi}\psi_r dx, \end{aligned} \tag{3.16}$$

так как

$$\int\limits_{\rho\geq r\geq 0} d\rho \int\limits_{|x|\geq\rho} (|x|-\rho)^k f(x)dx$$

$$= \int\limits_{0\leq r\leq\rho\leq|x|} (|x|-\rho)^k f(x)dxd\rho$$

$$= \int\limits_{|x|\geq r\geq 0} f(x)dx \int\limits_{r}^{|x|} (|x|-\rho)^k d\rho$$

$$= \frac{1}{k+1} \int\limits_{|x|\geq r\geq 0} (|x|-r)^{k+1} f(x)dx,\ k=\overline{0,\infty} \tag{3.17}$$

и

$$\int\limits_{\rho\geq r} d\rho \int\limits_{|x|=\rho} f(x)dS = \int\limits_{|x|\geq r} f(x)dx.$$

iii) Из равенства (3.11) при $\gamma = 1$ и $\rho = r_1$ вытекает

$$\int\limits_{B_{r_1,R}} r(|\nabla\psi|^2 - \lambda|\psi|^2)dx$$

$$= \int\limits_{|x|=R} r\overline{\psi}\psi_r dS - \int\limits_{|x|=r_1} r\overline{\psi}\psi_r dS$$

$$- \int\limits_{B_{r_1,R}} \left(\overline{\psi}\psi_r + rV|\psi|^2\right) dx$$

Устремляя $R\to\infty$, по Лемме 3.1 получим, что

$$\int\limits_{|x|\geq r_1} r(|\nabla\psi|^2 - \lambda|\psi|^2)dx = -\int\limits_{|x|=r_1} r\overline{\psi}\psi_r dS$$

$$- \int\limits_{|x|\geq r_1} \left(\overline{\psi}\psi_r + rV|\psi|^2\right) dx \tag{3.18}$$

Далее, учитывая (3.16) и (2.2), получим

$$\int\limits_{|x|\geq r_1} (|x|-r_1)(|\nabla\psi|^2 + \lambda|\psi|^2)dx$$

$$\leq C \int\limits_{|x|\geq r_1} r(|\nabla\psi|^2 - \lambda|\psi|^2)dx - 2C \int\limits_{|x|\geq r_1} \overline{\psi}\psi_r dx$$

$$= -C \int\limits_{|x|\geq r_1} \left(\overline{\psi}\psi_r + rV|\psi|^2\right) dx - C \int\limits_{|x|=r_1} r\overline{\psi}\psi_r dS$$

$$-2C \int\limits_{|x|\geq r_1} \overline{\psi}\psi_r dx \leq C_1' \int\limits_{|x|\geq r_1} (|\nabla\psi|^2 + \lambda|\psi|^2)dx$$

$$+C_1'' r_1 \int\limits_{|x|=r_1} |\psi\psi_r| dS. \tag{3.19}$$

Из неравенства (3.19) следует, что (3.3) верно при $k = 1$.

iv) Осталось доказать (3.3) для всех целых $k > 1$. Интегрируя (3.19) по $r_1 \geq r_2$ и используя (3.17), получим

$$\int\limits_{|x|\geq r_2} (|x| - r_2)^2(|\nabla\psi|^2 + \lambda|\psi|^2)dx$$

$$\leq C_2' \int\limits_{|x|\geq r_2} (|x| - r_2)(|\nabla\psi|^2 + \lambda|\psi|^2)dx$$

$$+C_2'' \int\limits_{|x|\geq r_2} r|\psi\psi_r|dx$$

$$\leq C_2 \int\limits_{|x|\geq r_2} (ar + b)(|\nabla\psi|^2 + \lambda|\psi|^2)dx,$$

где a и $b = b(r_2)$ — константы. Проделывая это несколько раз, из (3.17) получим оценку

$$\int\limits_{|x|\geq r_k} (|x| - r_k)^k(|\nabla\psi|^2 + \lambda|\psi|^2)dx$$

$$\leq C_k \int\limits_{|x|\geq r_k} P_{k-1}(r)(|\nabla\psi|^2 + \lambda|\psi|^2)dx,$$

где $P_{k-1}(r)$ — многочлен степени $\leq k - 1$. Далее, (3.3) можно вывести индукцией по k для всех целых $k > 0$, и, следовательно, (3.3) верно для всех $k \in \mathbb{R}$, потому что $\langle x\rangle^k \leq \langle x\rangle^{k'}$, $\forall k \leq k'$, $k, k' \in \mathbb{R}$, так как $\langle x\rangle = \sqrt{1 + |x|^2} \geq 1$. $\square$

4 Неравенства Карлемана

Следующее неравенство доказано в [13, Proposition 14.7.1].

Предложение 4.1 *Для любой функции* $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus 0)$ *и* $\lambda, \tau \in \mathbb{R}$, $\lambda, \tau > 0$ *выполнено следующее неравенство:*

$$2\lambda\tau \int |u|^2|x|^\tau dx \leq \int |(\Delta + \lambda)u|^2|x|^{2+\tau}dx. \tag{4.1}$$

Доказательство. Обозначим за M правую часть (4.1):

$$M := \int |(\Delta + \lambda)u|^2|x|^{2+\tau}dx. \tag{4.2}$$

Запишем выражение оператора Лапласа Δ в сферических координатах r, θ, φ: по определению,

$$\begin{aligned} x^3 &= r\cos\theta, \\ x^1 &= r\sin\theta\cos\varphi, \\ x^2 &= r\sin\theta\sin\varphi. \end{aligned} \tag{4.3}$$

В данных координатах Δ выражается как

$$\Delta = \partial_r^2 + 2r^{-1}\partial_r + r^{-2}\Delta_S, \tag{4.4}$$

где Δ_S — оператор Лапласа на единичой сфере S_1:

$$\Delta_S = (\sin\theta)^{-1}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + (\sin\theta)^{-2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}. \tag{4.5}$$

Используя подстановку Эйлера $r = e^t$, мы получим

$$\Delta + \lambda = e^{-2t}\left(\partial_t^2 + \partial_t + \Delta_S + \lambda e^{2t}\right),$$

так как $\partial_r = e^{-t}\partial_t$, $\partial_r^2 = e^{-2t}\left(\partial_t^2 - \partial_t\right)$. Тогда

$$M = \int\limits_{S_1}\int\limits_{\mathbb{R}} |\left(\partial_t^2 + \partial_t + \Delta_S + \lambda e^{2t}\right) u|^2 e^{t(\tau+1)} dt d\omega, \tag{4.6}$$

где $\omega = x/|x| \in S_1$. Чтобы убрать экспоненциальный множитель из (4.6), рассмотрим функцию

$$v(t,\omega) = e^{t(\tau+1)/2} u(e^t\omega).$$

Тогда

$$\begin{gathered}\partial_t u(e^t\omega) = \partial_t(e^{-t(\tau+1)/2} v(t,\omega)) = \\ e^{-t(\tau+1)/2}\left(\partial_t - \frac{\tau+1}{2}\right) v, \\ \left(\partial_t^2 + \partial_t + \Delta_S + \lambda e^{2t}\right) u = e^{-t(\tau+1)/2} \times \\ \times \left[\left(\partial_t - \frac{\tau+1}{2}\right)^2 + \left(\partial_t - \frac{\tau+1}{2}\right) + \Delta_S + \lambda e^{2t}\right] v \\ = e^{-t(\tau+1)/2}\left[\partial_t^2 - \tau\partial_t + \frac{\tau^2-1}{4} + \Delta_S + \lambda e^{2t}\right] v, \end{gathered} \tag{4.7}$$

и далее,

$$\begin{gathered} M = \int\limits_{S_1}\int\limits_{\mathbb{R}} |Dv|^2 dt d\omega \\ = \int\limits_{S_1}\int\limits_{\mathbb{R}} |(\partial_t^2 - \tau\partial_t + \frac{\tau^2-1}{4} + \Delta_S + \lambda e^{2t}) v|^2 dt d\omega, \end{gathered}$$

где

$$\begin{gathered} D = D_1 + D_2, \\ D_1 = \partial_t^2 + \frac{\tau^2-1}{4} + \Delta_S + \lambda e^{2t},\ D_2 = -\tau\partial_t. \end{gathered}$$

Обозначим

$$\|\varphi\|^2 = \int\limits_{S_1}\int\limits_{\mathbb{R}} |\varphi(t,\omega)|^2 dt d\omega.$$

Тогда

$$\begin{gathered} M = \|Dv\|^2 = \|D_1 v + D_2 v\|^2 \\ = \|D_1 v\|^2 + \|D_2 v\|^2 + \int\limits_{S_1}\int\limits_{\mathbb{R}} \overline{v}[D_1, D_2] v dt d\omega, \end{gathered} \tag{4.8}$$

так как D_1 — симметричный и D_2 — антисимметричный операторы. Далее,

$$[D_1, D_2] = -\lambda\tau[e^{2t}, \partial_t] = 2\lambda\tau e^{2t}. \tag{4.9}$$

Следовательно,

$$\int\limits_{S_1}\int\limits_{\mathbb{R}} \overline{v}[D_1, D_2]v dt d\omega = 2\lambda\tau \int\limits_{S_1}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{2t}|v|^2 dt d\omega$$

$$= 2\lambda\tau \int |u|^2|x|^\tau dx,$$

что представляет собой левую часть (4.1). Теперь (4.1) следует из (4.2) и (4.8).

$$\int |(\Delta+\lambda)u|^2|x|^{2+\tau}dx$$

$$= \|D_1 v\|^2 + \|D_2 v\|^2 + \int\limits_{S_1}\int\limits_{\mathbb{R}} \overline{v}[D_1, D_2]v dt d\omega$$

$$\geq \int\limits_{S_1}\int\limits_{\mathbb{R}} \overline{v}[D_1, D_2]v dt d\omega = 2\lambda\tau \int |u|^2|x|^\tau dx.$$

□

5 Доказательство теоремы Като

Доказательство. Возьмём функцию $\xi \in C_0^\infty$, такую, что $\xi(x) = 1$ для $|x| < 1$ и $\xi(x) = 0$ для $|x| > 2$ и обозначим

$$\psi_{(r,R)}(x) = \xi\left(\frac{x}{R}\right)\psi_{(r)}(x),$$

$$\psi_{(r)}(x) = \left(1 - \xi\left(\frac{x}{r}\right)\right)\psi(x).$$

Далее мы устремим $r \to 0$ и $R \to \infty$. Заметим, что разность

$$D(x) = (\Delta+\lambda)\psi_{(r,R)}(x) - \xi\left(\frac{x}{R}\right)(\Delta+\lambda)\psi_{(r)}(x)$$

$$= (\Delta+\lambda)\xi\left(\frac{x}{R}\right)\psi_{(r)}(x) - \xi\left(\frac{x}{R}\right)(\Delta+\lambda)\psi_{(r)}(x)$$

$$= \Delta(\xi\left(\frac{x}{R}\right)\psi_{(r)}(x)) - \xi\left(\frac{x}{R}\right)\Delta\psi_{(r)}(x)$$

$$= \psi_{(r)}(x)\Delta\xi\left(\frac{x}{R}\right) + 2\nabla\psi_{(r)}(x)\cdot\nabla\xi\left(\frac{x}{R}\right)$$

равна нулю при $|x| < R$, потому что для таких x функция $\psi_{(r)}(x) \equiv 0$. С другой стороны, $\psi_{(r)}(x) = \psi(x)$ для $|x| > 2r$. Следовательно, если $2r < R$, то

$$|D(x)| = 0, \quad \text{если} \quad |x| < R,$$

$$|D(x)| = |\psi(x)\Delta\left[\xi\left(\frac{x}{R}\right)\right] + 2\nabla\left[\psi(x)\right]\cdot\nabla\left[\xi\left(\frac{x}{R}\right)\right]|$$

$$= |\psi(x)\frac{1}{R^2}\left[\Delta\xi\right]\left(\frac{x}{R}\right) + 2\nabla\psi(x)\cdot\frac{1}{R}\left[\nabla\xi\right]\left(\frac{x}{R}\right)|,$$

$$\text{если} \quad |x| \geq R > 2r.$$

$\Delta\xi$ и $\nabla\xi$ — ограниченные функции, потому что $\xi \in C_0^\infty$ и $\Delta\xi = \nabla\xi = 0$, если $|x| > 1$ или $|x| < 2$. Следовательно, для достаточно больших R ($R > 1$) верно

$$|D(x)| \leq \frac{C}{R}\sum_{|\alpha|\leq 1}|\partial^\alpha\psi(x)| \quad \text{если} \quad 2r < R. \tag{5.1}$$

Обозначим $u = \psi_{(r,R)} \in \mathcal{H}^2$ и

$$u_{(M)}(x) = \xi\left(\frac{x}{M}\right)u(x)$$

и

$$u_{(M)h}(x) = \int u_{(M)}(y)\omega_h(x-y)dy,$$

где $\omega_h(x)$ — ядро усреднения, такое, что

$$\omega_h(x) = \frac{1}{h^3}\omega_1\left(\frac{x}{h}\right),\ \omega_1(x) \in C_0^\infty,$$

$$\omega_1(x) = 0,\ \text{если } |x| \geq 1,\ \int \omega_1(x)dx = 1.$$

Заметим, что если $u \in \mathcal{H}^2$, то

$$u_{(M)} \in \mathcal{H}^2,\ u_{(M)h} \in C_0^\infty,$$

так как

$$\partial_x^\alpha u_{(M)h}(x) = \int u_{(M)}(y)\partial_x^\alpha \omega_h(x-y)dy.$$

Важно, что

$$u_{(M)h} \to u \quad \text{при} \quad M \to \infty,\ h \to 0,$$

где сходимость понимается как сходимость в пространстве $\mathcal{H}^2$. Далее, применяя (4.1) к аппроксимациям $u_{(M)h}(x) \in C_0^\infty$ и устремляя $M \to \infty,\ h \to 0$, получим, что

$$2\lambda\tau \int |\psi_{(r,R)}|^2|x|^\tau dx \leq \int |(\Delta+\lambda)\psi_{(r,R)}|^2|x|^{2+\tau}dx.$$

Далее,

$$\int |(\Delta+\lambda)\psi_{(r,R)}|^2|x|^{2+\tau}dx$$

$$= \int \left|D(x) + \xi\left(\frac{x}{R}\right)(\Delta+\lambda)\psi_{(r)}\right|^2 |x|^{2+\tau}dx$$

$$\leq 2\int \left(|D(x)|^2 + \left|\xi\left(\frac{x}{R}\right)(\Delta+\lambda)\psi_{(r)}\right|^2\right)|x|^{2+\tau}dx.$$

Однако, из (5.1) следует, что

$$\int |D(x)|^2|x|^{2+\tau}dx$$

$$\leq \left(\frac{C}{R}\right)^2 \int \left(\sum_{|\alpha|\leq 1} |\partial^\alpha \psi(x)|\right)^2 |x|^{2+\tau}dx$$

$$\leq \frac{C'}{R}\int \left(|\nabla\psi|^2 + |\psi|^2\right)|x|^{2+\tau}dx < \infty,\ \forall\tau > 0,$$

$$2\lambda\tau \int |\psi_{(r)}|^2|x|^\tau dx \leq 2\int |(\Delta+\lambda)\psi_{(r)}|^2|x|^{2+\tau}dx \tag{5.2}$$

причём последний интеграл конечен по Предложению 3.2.Далее,

$$(\Delta+\lambda)\psi_{(r)}(x)$$

$$= \Delta\left(\left(1-\xi\left(\frac{x}{r}\right)\right)\psi(x)\right) + \left(1-\xi\left(\frac{x}{r}\right)\right)H\psi(x)$$

$$= -\psi(x)\Delta\xi\left(\frac{x}{r}\right) + \left(1-\xi\left(\frac{x}{r}\right)\right)\Delta\psi(x)$$

$$-2\nabla\xi\left(\frac{x}{r}\right)\cdot\nabla\psi(x) + \left(1-\xi\left(\frac{x}{r}\right)\right)(-\Delta+V(x))\psi(x)$$

$$= V(x)\psi_{(r)}(x) - 2\nabla\xi\left(\frac{x}{r}\right)\cdot\nabla\psi(x) - \psi(x)\Delta\xi\left(\frac{x}{r}\right)$$

$$= V(x)\psi_{(r)}(x) - \frac{2}{r}\left[\nabla\xi\right]\left(\frac{x}{r}\right)\cdot\nabla\psi(x)$$
$$-\frac{1}{r^2}\psi(x)\left[\Delta\xi\right]\left(\frac{x}{r}\right).$$

Следовательно, для $2r < 1$

$$\int |(\Delta+\lambda)\psi_{(r)}|^2|x|^{2+\tau}dx$$
$$\leq 2\int |V\psi_{(r)}|^2|x|^{2+\tau}dx$$
$$+\frac{C}{r^4}\int\limits_{|x|\leq 2r}\sum_{|\alpha\leq 1|}|\partial^\alpha\psi(x)|^2|x|^{2+\tau}dx$$
$$\leq 2\int |V\psi_{(r)}|^2|x|^{2+\tau}dx + C_1(2r)^{\tau-2} \tag{5.3}$$

То есть, из (5.2) и (5.3) следует, что для $2r < 1$ верно

$$2\lambda\tau\int|\psi_{(r)}|^2|x|^\tau dx$$
$$\leq 2\int|(\Delta+\lambda)\psi_{(r)}|^2|x|^{2+\tau}dx$$
$$\leq 4\int|V\psi_{(r)}|^2|x|^{2+\tau}dx + 2C_1(2r)^{\tau-2}$$

Используя (2.2), получим

$$2\lambda\tau\int|\psi_{(r)}|^2|x|^\tau dx$$
$$\leq 4\int|V\psi_{(r)}|^2|x|^{2+\tau}dx + 2C_1(2r)^{\tau-2}$$
$$\leq C_2\int|\psi_{(r)}|^2|x|^\tau dx + C_1^{'}(2r)^{\tau-2}$$
$$(2\lambda\tau - C_2)\int|\psi_{(r)}|^2|x|^\tau dx \leq C_1^{'}(2r)^{\tau-2}.$$

Следовательно,

$$(2\lambda\tau - C_2)(2r)^\tau\int\limits_{|x|\geq 2r}|\psi|^2dx \leq C_1^{'}(2r)^{\tau-2},$$

и

$$\int\limits_{|x|\geq 2r}|\psi|^2dx \leq \frac{C_1^{'}}{4r^2(2\lambda\tau - C_2)} \to 0 \quad \text{при} \quad \tau\to\infty.$$

То есть, $\psi = 0$ для $|x| > 2r$ для достаточно маленького $r > 0$. Теорема 2.1 доказана. □

Литература

[1] *Reed M., Simon B.*, Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. IV: Analysis of Operators, Academic Press, New York, 1978.

[2] *Rellich F.*, Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von $\Delta u + \lambda u = 0$ in unendlichen Gebieten.– Über. Deutsch. Math. Verein 53 (1943), 57—65.

[3] *Kato T.*, Growth properties of solutions of the reduced wave equation with a variable coefficient, Commun. Pure Appl. Math. 12 (1959), 403–425.

[4] *Kreith K.*, Differential operators with a purely continuous spectrum.– Proc. Amer. Math. Soc. 14 (1963), 809–811.

[5] *Odeh F.*, Note on differential operators with a purely continuous spectrum.– Proc. Amer. Math. Soc. 16 (1965), 363–366.

[6] *Berezin F.A., Shubin M.A.*, The Schrödinger Equation, Kluver Academic Publishers, Dordrecht, 1991.

[7] *Simon B.*, On positive eigenvalues of one-body Schrödinger operators.– Comm. Pure Appl. Math. 22 (1969), 531–538.

[8] *Agmon S.*, Lower bounds for solutions of Schrodinger-type equations in unbounded domains.–Proc. of the Int. Conf. on Functional Analysis and Related Topics, Univ. Tokyo Press, Tokyo, 1969.

[9] *Agmon S.*, Lower bounds for solutions of Schrödinger equations.– J. Analyse Math. 23 (1970), I–25.

[10] *Weidmann J.*, On the continuous spectrum of Schrodinger operators.– Comm. Pure Appl. Math. 19 (1966), 107–110.

[11] *Ikebe T., Uchiyama J.*, On the asymptotic behavior of eigenfunctions of second order elliptic operators.– J. Math. Kyoto Univ. 11 (1971), 425–448.

[12] *Eidus D.M.*, The principle of limit amplitude, Russ. Math. Surv. 24 (1969), no. 3, 97–167.

[13] *Hörmander L.*, The Analysis of Linear Partial Differential Operators, Vol. II: Differential Operators with Constant Coefficients, Springer, Berlin, 2005.

[14] *Komech A.I.*, Lectures on Elliptic Partial Differential Equations (Method of Pseudodifferential Operators). – Wien, October-December 2006.

[15] *Komech A., Kopylova E.*, Dispersion decay and scattering theory. – Vienna University and IITP RAS, 2012. – ISBN 0-471-48348-6.