УДК 514.112.4

Компьютерная система построения доказательств существования апериодической траектории для внешних биллиардов вне правильных многоугольников

Ф.Д.Рухович

Московский физико-технический институт (государственный университет), факультет инноваций и высоких технологий

E-mail: dprpavlin@gmail.com

Рассматривается преобразование внешнего биллиарда вне правильных многоугольников. Основным результатом является построение компьютерной системы, с помощью которой удалось получить доказательство существования апериодической точки для внешнего биллиарда при n = 8, 12.

ВВЕДЕНИЕ

Для любой гладкой выпуклой кривой γ на плоскости можно определить отображение внешности этой кривой в себя, называемое внешним биллиардом. А именно, обозначим кривую γ, и пусть x — точка вне ее. Существуют две касательные к γ прямые, проходящие через x; выберем одну из них, например правую относительно x, и, отразив x относительно точки касания, получим новую точку Tx *(рис.1)*.

Опр. 1: Отображение T называется *внешним биллиардом;* кривая γ называется *столом внешнего биллиарда.*

Опр. 2: Точку x вне фигуры γ назовем *периодической*, если существует такое натуральное n, что $T^n x = x$, а *периодом* этой точки – минимальное такое n.

В случае, когда стол есть многоугольник, точки вне стола можно разбить на следующие три типа: 1) точки с конечной траекторией (случай, когда $T^n x$ не определено для некоторого n); 2) точки с периодической траекторией; 3) точки с апериодической траекторией; в дальнейшем будем называть такие точки *апериодическими*.

В данной статье нас будут интересовать внешние биллиарды вне правильных многоугольников. Открытым в общем случае вопросом остается существование апериодической точки для внешнего биллиарда вне правильных многоугольников. Внешние биллиарды вне правильных тре-, четырех- и шестиугольника являются наиболее простыми случаями; несложно показать (см., например, [1]), что в этих случаях апериодической точки нет. Табачникову [1] удалось показать, что существует апериодическая точка для внешнего биллиарда вне правильного пятиугольника; основным результатом настоящей статьи является аналогичный результат для случая правильных восьми- и двенадцатиугольника.

ПРАВИЛЬНЫЙ ВОСЬМИУГОЛЬНИК

Рассмотрим правильный восьмиугольник и инвариантную инвариантную относительно соответствующего внешнего биллиарда компоненту, изображенную на рис. 2. Разделим ее на 8 равных частей и отождествим их относительно поворота на 45n градусов; на каждой из таких четырехугольных частей (OKLM на рис. 3) внешний биллиард индуцирует производное отображение T, которое разбивает фигуру на три части и поворачивает их на 45, 90 или 135 градусов.

Оказывается, что если рассмотреть преобразование первого возвращения (first return map) T' четырехугольника OK'L'M', изображенного на рис.3, подобного OKLM, а также сжатие Γ, переводящее OKLM в OK'L'M', то преобразования ΓT и T'Γ окажутся эквивалентными, а Γ играет роль подстановки. Орбиты преобразования первого возвращения также изображены на рис.3.

Для каждой точки x внутри OKLM определим её неотрицательный целый *ранг*, равный максимальному числу n, т.ч. Γ^{-n} все еще лежит в OKLM; для каждой же *периодической* орбиты определим её ранг как максимальный среди рангов точек этой орбиты. Можно показать, что все периодические орбиты можно получить с помощью Γ из орбит ранга 0; множество же точек ранга 0 представляют собой четыре (открытых) восьмиугольника (рис. 3).

Отсюда следует, что множество точек, имеющих периодические орбиты n-го уровня, суть набор из $4*9^n$ восьмиугольников, причем размер орбиты экспоненциально растет с ростом ранга. Нетрудно видеть, что существуют точки четырехугольника OKLM, не лежащие внутри одного из таких восьмиугольников или на их границах; рассмотрим одну из них, являющуюся пределом «самоподобной» последовательности точек, начинающейся с точек c0, c1, c2 (см. рис. 3), и продолжающейся аналогичным образом в подобном OKLM четырехугольнике, находящемся внутри треугольника c0c1c2 (т.е. есть перевести с помощью сжатия OKLM в такой четырехугольник, то c0, c1 и c2 перейдут в c3, c4 и c5, соответственно; дальнейшим сжатием получим c6, c7 и c8 и т.д.;); назовем эту точку C. Эта точка и является апериодической точкой внешнего биллиарда вне правильного восьмиугольника.

ПРАВИЛЬНЫЙ ДВЕНАДЦАТИУГОЛЬНИК

В случае же правильного двенадцатиугольника можно провести аналогичные рассуждения. Ключевым моментом здесь является поиск преобразования самоподобия, аналогичного Г; «одинаковыми» являются преобразования первого возвращения для фигуры X и подобной её фигуры A_{cp} (рис. 4); отметим, что A_{cp} не является фигурой-результатом отождествления точек относительно поворота на 30 градусов; A_{cp} лишь подобна этой «одной двенадцатой» инвариантной компоненты. Также отметим, что точки «ранга 0» имеют существенно более сложную структуру (рис. 4); однако периодичные фигуры C_0, C_1, C_2 (все тот же рис. 4) и преобразование Г задают спиралеобразную последовательность периодических фигур $C_i = Г(C_{i-3})$, $i > 2$, сходящуюся к апериодической точке. Таким образом, апериодическая точка существует для внешних биллиардов вне правильных восьми- и двенадцатиугольника.

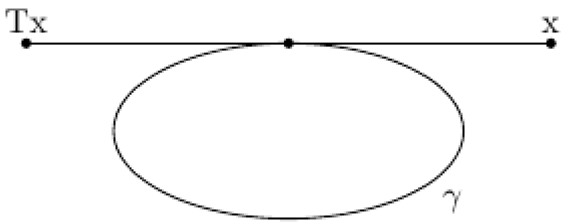

Рис. 1

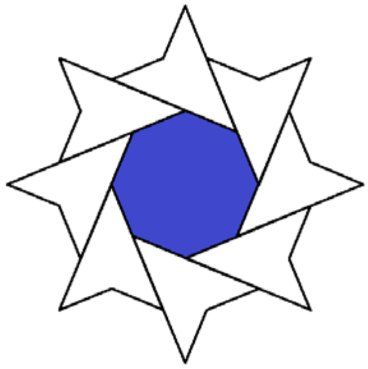

Рис. 2

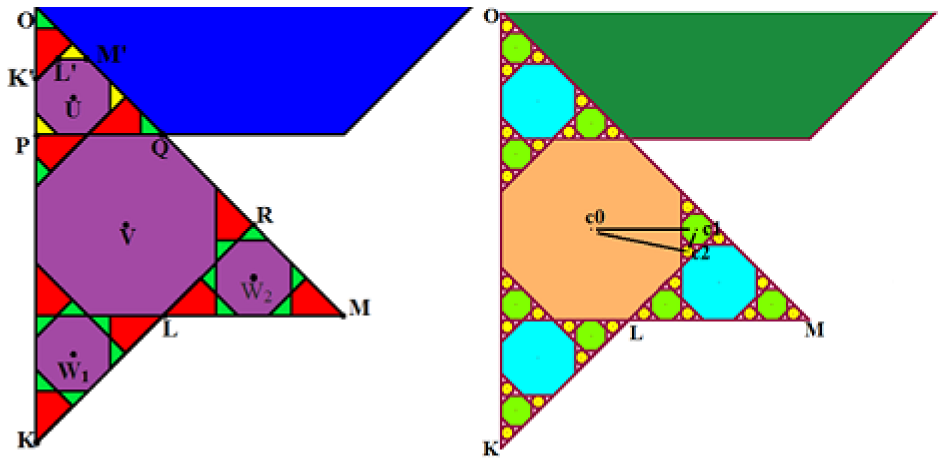

Рис. 3.

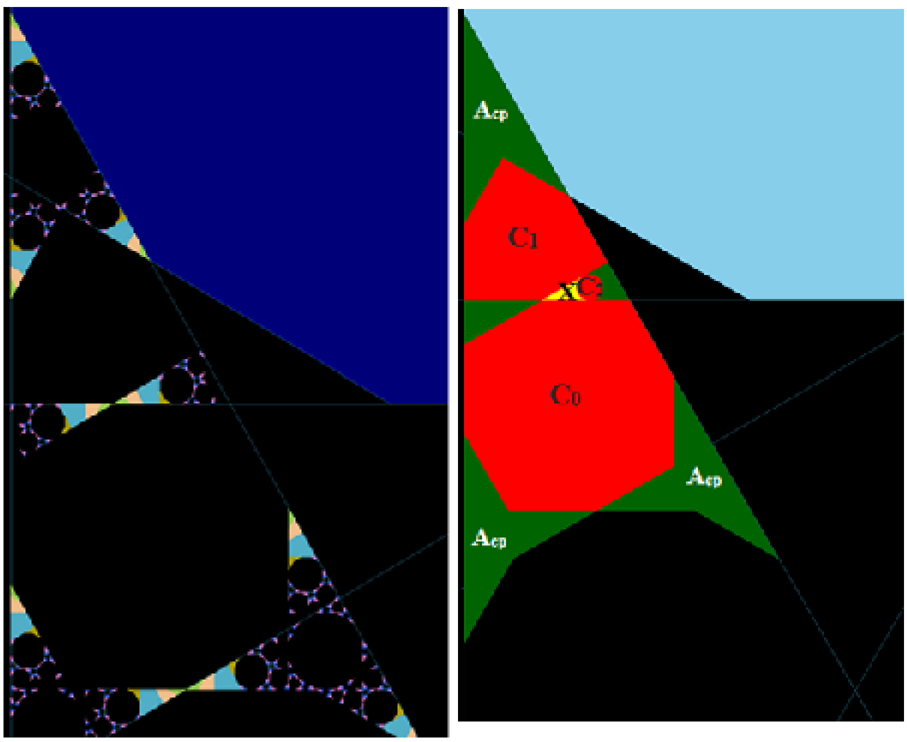

Рис. 4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Табачников С. Внешние биллиарды // Успехи математических наук, т.48, 1993 г., вып. 6(294), 75-102.
2. Табачников С. Геометрия и биллиарды // Библиотека журнала «Реальная и хаотическая динамика», АНО “Ижевский институт научных исследований», М./Ижевск, 2011 г.
3. S. Tabachnikov. On the dual billiard problem. Advances in Math., 115(1995), 221-249.
4. J. Moser. Stable and random motioпs in dynamical systems, Ann. Of Math. Stud., 77, Princeton, 1973.
5. J. Moser. Is the solar system stable? Math. Intell. **1** (1978), p. 65-71.
6. R. Schwartz. Unbounded orbits for outer billiards. I. J. Mod. Dyn. 1 (2007), p.371-424.
7. R. Schwartz. Outer Billiards on kites. Annals of Mathematics Studies, 171. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2009.
8. D. Dolgopyat, B. Fayad. Unbounded orbits for semicircular outer bllliard. Ann. Henri Poincare 10 (2009), p. 357-375.