УДК 51-76

Моделирование и исследование распространения эпидемий с учетом стохастических эффектов

А.И. Чесноков[1,2]

[1]Вычислительный центр имени А. А. Дородницына РАН

[2]Московский физико-технический институт (государственный университет)

Со второй половины XX века в связи с бурным развитием вычислительной техники разработано множество моделей развития эпидемиологических процессов, где основным инструментом представленных исследований является теория случайных процессов. Большинство этих работ оторвано от реальных эпидемиологических проблем [1]. Целью данной работы являлся переход от непрерывной детерминированной математической модели, описывающей динамику эпидемии гриппа в неоднородном сообществе, состоящем из n групп, к стохастической модели для возмущенного коэффициента роста заболеваемости и обоснование применимости такого перехода на основании реальных данных:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\beta x(t)y(t) - \mu x(t) + \Lambda - \sigma xy\xi(t,\omega) \\ \dot{y}(t) = \beta x(t)y(t) - (\gamma + \mu + \tilde{\mu})y(t) + \sigma xy\xi(t,\omega) \end{cases}, \qquad (1)$$

где

$$\begin{aligned} &t \in [0,T]; \\ &x(t) \ge 0; \\ &y(t) \ge 0; \\ &x(0) = x_0; \\ &y(0) = y_0 \end{aligned} \qquad (2)$$

Здесь $\dot{x}(t)$ – скорость изменения числа восприимчивых к инфекции, $\dot{y}(t)$ – скорость изменения больных, $\beta x(t)y(t)$ – скорость перехода здоровых людей в группу инфицированных, $\gamma y(t)$ – количество выздоровевших людей без воздействия внешних средств, β – коэффициент роста заболеваемости, отражающий частоту контактов здоровых людей с инфицированными, μ – показатель естественной смертности, $\tilde{\mu}$ – показатель смертности от рассматриваемой инфекции, Λ – средняя скорость воспроизводства населения. $\xi(t,\omega)$ – случайный процесс; σ – постоянная, характеризующую степень влияния случайного возмущения на значение коэффициента β (динамика которого, на основании реальных данных, представляет собой случайное блуждание), характеризующего частоту контактов инфицированных с подверженными заболеванию представителями популяции.

Для моделирования решений полученной системы стохастических дифференциальных уравнений был применен метод унифицированного разложения Тейлора-Ито, предложенный Кузнецовым Д.Ф. [2]

Для построения решений были использованы реальные данные по заболеваемости гриппом в городах РФ за 1988-2006 годы. В результате были построены различные сценарии распространения эпидемиологического процесса (как динамики инфицированных, так и подверженных заболеванию) в зависимости от коэффициентов возмущения для коэффициента роста заболеваемости (Рис.1,2).

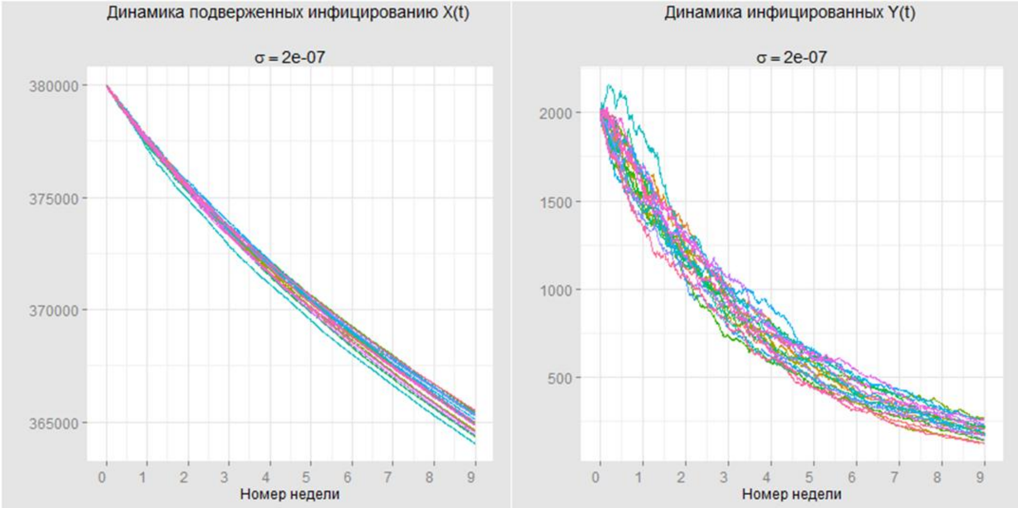

Рис. 1 Траектории развития эпидемиологического процесса при $\sigma = 2 \cdot 10^{-7}$

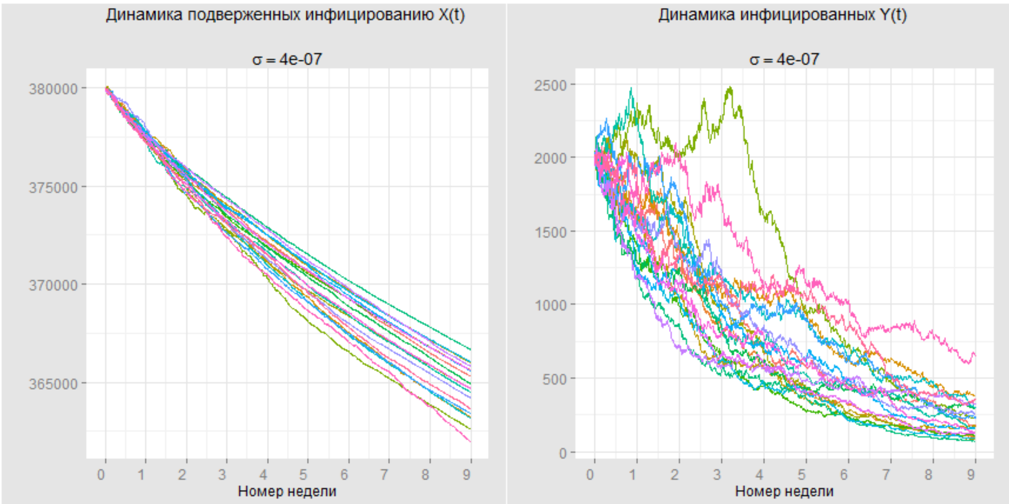

Рис. 2 Траектории развития эпидемиологического процесса при $\sigma = 4 \cdot 10^{-7}$

Результаты позволяют сделать вывод, что при $\sigma \le 10^{-7}$ решение возмущенной системы практически совпадает с детерминированной, следовательно, для описания системы допустимо использовать детерминированную схему решения. А при $\sigma \ge 2 \cdot 10^{-7}$ решения стохастической модели более чем на 10% отличаются от детерминированной.

Таким образом были определены границы применимости детерминированного подхода для описания эпидемиологического процесса и получена модель, которую можно использовать для дальнейших исследований зависимости динамики заболевания от случайных факторов.

Литература

1. *Бейли Н. Т. Дж.* Математика в биологии и медицине: Пер. с англ. — М.: Мир, 1970. 326 с.
2. *Кузнецов Д.Ф.* Численное моделирование стохастических дифференциальных уравнений и стохастических интегралов. — СПб: Наука, 1999. 459 с.