УДК 530.1

Поля высших спинов и заряды в периодическом пространстве твисторов

М.А. Васильев, Е.О. Гончаров

Отделение теоретической физики им. Тамма,
Физический Институт им. П.Н. Лебедева

Аннотация

$sp(2M)$-инвариантная развёрнутая система рассматривается в периодическом пространстве твисторов. Построена полная система ненулевых зарядов, соответствующих глобальной симметрии системы, согласующейся с условиями периодичности. Показано, что заряды, полученные интегрированием по различным нестягиваемым друг к другу циклам связаны специальным преобразованием из алгебры высших спинов.

1 Введение

На мультиплете полей всех спинов $s = 0, \frac{1}{2}, 1, ...$ в пространстве Минковского ($d = 4$) действует группа $Sp(8)$, что было впервые показано в [1]. Явным образом её действие реализуется на действительных функциях $C(X)$ и $C_A(X)$, (кодирующих бозоны и фермионы) на пространстве $\mathcal{M}_4$ с координатами X^{AB}, где $X^{AB} = X^{BA}$ и $A, B = 1 \dots 4$ (см. [2]). Обобщение на случай $Sp(2M)$-инвариантной формулировки достигается расширением диапазона значений индексов: $A, B = 1 \dots M$, $M \geq 2$, и широко исследовано (см. например [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18]). Случай $M = 2$ описывает мультиплет полей в пространстве Минковского размерности $d = 3$, $M = 4$ – в $d = 4$, а старшие M дают описание мультиплета полей высших спинов в специальных старших размерностях [12].

Для $Sp(2M)$-инвариантной формулировки было предложено *развёрнутое описание* [17]. Вводятся дополнительные переменные $Y \in \mathbb{R}^M$, которые впоследствие оказываются тесно связанными с твисторами (см. например [16]), и динамика полей описывается в терминах сопряжённых друг другу комплекснозначных функций $C^{\pm}(Y|X)$ на $\mathcal{M}_M \times \mathbb{R}^M$, отвечающих уравнениям [17]

$$\left(\frac{\partial}{\partial X^{AB}} \pm i \frac{\partial^2}{\partial Y^A \partial Y^B}\right) C^{\pm}(Y|X) = 0. \tag{1.1}$$

Поля C^+ отвечают частицам, C^- – античастицам [2, 17].

Уравнения (1.1) обладают бесконечномерной симметрией высших спинов [19], генерируемой операторами

$$\mathcal{A}^B_{\pm}(Y|X) = Y^B \mp 2iX^{BC}\frac{\partial}{\partial Y^C}, \quad \mathcal{B}^{\pm}_C(Y|X) = \frac{\partial}{\partial Y^C}, \tag{1.2}$$

коммутирующими с оператором уравнения (1.1). Операторы (1.2) образуют две коммутирующие алгебры Гейзенберга H_M [16] с ненулевыми коммутационными соотношениями

$$\left[\mathcal{B}^{\pm}{}_A, \mathcal{A}_{\pm}{}^B\right] = \delta^B_A, \qquad \left[\mathcal{A}_{\pm}{}^B, \mathcal{A}_{\pm}{}^C\right] = 0, \quad \left[\mathcal{B}^{\pm}{}_B, \mathcal{B}^{\pm}{}_C\right] = 0, \tag{1.3}$$

ввиду чего называются *ковариантными осцилляторами.* Наличие бесконечномерной симметрии, действующей на решениях (1.1), влечёт наличие бесконечного числа законов сохранения и отвечающих им зарядов. Полная система сохраняющихся зарядов, отвечающих конформной и высшим симметриям, была построена в [17] (см. также [20, 21, 22]). В рамках развёрнутого описания сохраняющиеся заряды строятся интегрированием замкнутой дифференциальной формы на пространстве $\mathcal{M}_M \times \mathbb{R}^M$ по поверхности задания начальных данных [17]. Замкнутость формы обеспечивает сохранение построенных зарядов для локализованных конфигураций полей, а также обеспечивает произвол в выборе поверхности интегрирования, позволяя производить их вычисление как по пространственно-временным переменным X, так и, в равной степени, по твисторным переменным Y.

Замкнутые формы строятся с использованием *полей ранга два*, или *токов* [17], отвечающих развёрнутому уравнению

$$\left(\frac{\partial}{\partial X^{AB}} - i\frac{\partial^2}{\partial U^{(A}\partial V^{B)}}\right) J\left(U,V|X\right) = 0, \tag{1.4}$$

где $T_{(AB)} = \frac{1}{2}\left(T_{AB}+T_{BA}\right)$. Уравнение (1.4) обладает бесконечномерной симметрией, аналогичной таковой для (1.1), генерируемой операторами

$$\begin{aligned} \mathfrak{B} &= V^A + iX^{AB}\frac{\partial}{\partial U^B}, \quad \widetilde{\mathfrak{B}}_A = \frac{\partial}{\partial V^A}, \\ \widetilde{\mathfrak{B}} &= U^A + iX^{AB}\frac{\partial}{\partial V^B}, \quad \mathfrak{B}_A = \frac{\partial}{\partial U^A}, \end{aligned} \tag{1.5}$$

с ненулевыми коммутационными соотношениями

$$\left[\mathfrak{B}_A, \widetilde{\mathfrak{B}}^B\right] = \delta_A^B, \quad \left[\widetilde{\mathfrak{B}}_A, \mathfrak{B}^B\right] = \delta_A^B. \tag{1.6}$$

Нетрудно убедиться, что билинейная комбинация $C^+\left(V-U|X\right)C^-\left(V+U|X\right)$ решений (1.1) является решением (1.4). Билинейный комбинации полей вида $\sum_{\mathsf{i}=1}^{\mathcal{N}} C_{\mathsf{i}}^+ C_{\mathsf{i}}^-$, где вводится цветовой индекс $\mathsf{i} = 1...\mathcal{N}$, играют центральную роль при изучении AdS/CFT соответствия [17, 23, 24]. Для построения замкнутых дифференциальных форм, дающих полную систему сохраняющихся зарядов, используется наиболее общий вид билинейных полей ранга два

$$J_\eta\left(U,V|X\right) = \eta\big(\mathfrak{B},\widetilde{\mathfrak{B}}\big)\, C^+\left(V-U|X\right) C^-\left(V+U|X\right), \tag{1.7}$$

где η – произвольная функция ковариантных осцилляторов, кодирующая тип сохраняющейся величины (электрический заряд, энергия-импульс и т.д.). Рассматриваемая замкнутая форма –

$$\Omega\left(J_\eta\right) = W^1 \wedge ... \wedge W^M \;\; J_\eta\left(Y_{1,2}\left(U,V\right)|X\right)\big|_{U=0}, \tag{1.8}$$

где W^A – операторно-значная 1-форма

$$W^A = \mathrm{d}V^A + i\,\mathrm{d}X^{AB}\,\frac{\partial}{\partial U^B}. \tag{1.9}$$

Сохраняющиеся заряды получаются интегрированием (1.8) по пространственноподобной M-мерной поверхности $\Sigma \subset \mathcal{M}_M \times \mathbb{R}^M$ [17]:

$$\mathrm{Q}_\eta = \int_\Sigma \Omega\left(J_\eta\right). \tag{1.10}$$

Заряд Q_η не равен нулю тождественно только если форма $\Omega_\eta\left(J_\eta\right)$ не точна, т.е. заряды параметризуются когомологиями форм (1.8) на массовой оболочке (при выполнении уравнений (1.1)). Удобными представителями в классах когомологий являются параметры симметрии η вида $\eta\left(\mathfrak{B}\right)$ [17, 22].

Целью работы состояло построение сохраняющихся зарядов в случае периодических твисторных переменных: когда Y параметризуют тор T^M.

2 Периодическое пространство твисторов

При наложении периодичных условий на переменные Y, уравнение (1.1) влечёт периодичность решений также по переменным X. Таким образом, поля $C^{\pm}(Y|X)$ определены на торе $\mathcal{T}_M \times T^M$. Генераторы (1.2) нарушают периодичность, потому не являются симметриями (1.1) в периодическом случае. Операторы симметрии, отвечающие условию периодичности, имеют вид

$$e^{i\mathcal{A}^C_{\pm}},\ \mathcal{B}^{\pm}_C. \tag{2.1}$$

Они генерируют бесконечномерную симметрию, действующую на решениях (1.1), при наложении периодических условий на Y.

Периодичность решений (1.1) индуцирует периодичность решений уравнений ранга два (1.7). Наиболее общий вид периодического параметра симметрии в таком случае

$$\eta(\mathfrak{B}, \widetilde{\mathfrak{B}}) = \sum_{|N|_2 = |\widetilde{N}|_2} \eta_{N,\widetilde{N}}(\mathfrak{B}_C, \widetilde{\mathfrak{B}}_D)\, e^{iN_A\,\mathfrak{B}^A} e^{i\widetilde{N}_B\,\widetilde{\mathfrak{B}}^B}, \tag{2.2}$$

где для $N, \widetilde{N} \in \mathbb{Z}^M$ операции $|N|_2, |\widetilde{N}|_2 \in \mathbb{Z}_2{}^M$ обозначают покомпонентное сравнение по модулю 2. Параметры (2.2) параметризуют дифференциальную форму (1.8), интегрирование которой по M-мерной поверхности $\Sigma \subset \mathcal{T}_M \times T^M$ даёт сохраняющиеся заряды ввиду её замкнутости.

В отличие от непериодического случая, когда $Y \in \mathbb{R}^M$, на торе $\mathcal{T}_M \times T^M$ имеются нестягиваемые друг к другу M-мерные циклы, дающие, как можно ожидать, различные заряды. Однако оказывается, что для построения полного набора сохраняющихся зарядов достаточно рассматривать интегрирование формы (1.8) только по пространству $T^M \subset \mathcal{T}_M \times T^M$, т.е. только по твисторным переменным. Более конкретно, если обозначить заряд в виде спаривания поверхности интегрирования Σ и параметра симметрии η вида (2.2),

$$\langle \Sigma | \eta \rangle := \int_{\Sigma} \Omega\,(J_\eta)\,, \tag{2.3}$$

то для любого M-мерного цикла $\Sigma \subset \mathcal{T}_M \times T^M$, для любого параметра η (2.2) имеется параметр $\eta_0 = p\,(i\mathfrak{B}_C) * \eta$ такой, что

$$\langle \Sigma | \eta \rangle = \langle T^M | \eta_0 \rangle. \tag{2.4}$$

Под произведением $*$ подразумевается максимально симметричное упорядочение операторов $\mathfrak{B}, \widetilde{\mathfrak{B}}$, а $p\,(i\mathfrak{B}_C)$ – однородный полином, однозначно определённый для любого цикла Σ. Таким образом, всегда возможен переход к интегрированию по пространству твисторов за счёт повышения симметрии. Такое являние возможно только в том случае, когда высшие симметрии принимаются в рассмотрение – различные геометрические структуры (нестягиваемые друг к другу циклы на торе) оказываются связанными алгебраически с точки зрения сохраняющихся зарядов полей. На это можно также смотреть как на действие алгебры высших спинов на циклах на $\mathcal{T}_M \times T^M$, переводящее одни циклы в другие.

Классы когомологий форм (1.8) для (2.2) параметризуются представителями

$$\eta^{(\Gamma)} = \sum_{N : |N|_2 = \Gamma} \eta_N\,(\mathfrak{B}_C)\; e^{iN_A\,\mathfrak{B}^A} e^{i\Gamma_B\,\widetilde{\mathfrak{B}}^B}\,, \tag{2.5}$$

где $\Gamma \in \mathbb{Z}_2{}^M$. Таким образом, в отличие от непериодического случая, имеется остаточная зависимость от генераторов $\widetilde{\mathfrak{B}}_C$, задающих $\mathbb{Z}_2{}^M$-градуировку зарядов, вырождающуются в непериодическом пределе, когда радиусы тора T^M стремятся к ∞.

3 Заключение

Анализ сохраняющихся зарядов в случае периодических твисторных переменных Y для системы (1.1) демонстрирует ряд интересных результатов. Заряды представляются в виде интегралов от замкнутых форм в расширенном пространстве X^{AB}, Y^A. Так как периодичность по переменным Y влечёт периодичность по переменным X, возможно рассматривать заряды для различных нестягиваемых друг к другу циклов на торе $\mathcal{T}_M \times T^M$. Ввиду естественного включения в рассмотрение высших симметрий, заряды для различных циклов оказываются связанными алгебраически. А именно, для любого цикла Σ для любого параметра η (2.2) заряд $\langle\Sigma|\eta\rangle$ может быть получен также интегрированием по циклу T^M (по твисторным переменным) для параметра симметрии более высокого порядка $p\,(i\mathfrak{B}_C) * \eta$ – $\langle\Sigma|\eta\rangle = \langle T^M|p * \eta\rangle$. Такое явление может быть рассмотрено как геометрическое действие алгебры высших спинов на циклах тора $\mathcal{T}_M \times T^M$, переводящее одни циклы в другие. Оно не имеет места с точки зрения низших симметрий.

Классы когомологий форм (1.8) параметризуются представителями с параметрами (2.5). Заряды оказываются дополнительно $\mathbb{Z}_2{}^M$-градуированными по сравнению с непериодическим случаем. Проводя аналогию с удвоением спектра фермионов при наложении периодических (Рамоновских) граничных условий, можно поставить вопрос об обобщении периодических условий, накладываемых на переменные Y, на антипериодические (условия Неве-Шварца) [25].

Ожидается, что результаты работы в будущем могут быть использованы при изучении, построении и классификации чёрнодырных решений в различных размерностях.

4 Поддержка

Работа поддержана грантом РНФ №14-42-00047.

Литература

[1] *Fronsdal C.* Massless Particles, Orthosymplectic Symmetry And Another Type Of Kaluza-klein Theory// Essays On Supersymmetry*, 163-265 and Calif. Univ. Los Angeles - UCLA-85-TEP-10 (85,REC.JUN.) 111 P. (508632) .

[2] *Vasiliev M.A.* Relativity, causality, locality, quantization and duality in the Sp(2M) invariant generalized space-time// In *Olshanetsky, M. (ed.) et al.: Multiple facets of quantization and supersymmetry* P. 826-872, arXiv: [hep-th/0111119].

[3] *Bandos I.A., Lukierski J., Sorokin D.P.* Superparticle models with tensorial central charges// Phys. Rev. D V.61, 045002 (2000), arXiv: [hep-th/9904109v1].

[4] *Bandos I. A., Lukierski J., Preitschopf C., Sorokin D. P.* OSp supergroup manifolds, superparticles and supertwistors// Phys. Rev. D V.61 N 9 (2000), arXiv:[hep-th/9907113v1].

[5] *Vasiliev M.A.* Conformal higher spin symmetries of 4-d massless supermultiplets and osp(L,2M) invariant equations in generalized (super)space// Phys. Rev. D V.66 N 6 (2002),arXiv: [hep-th/0106149].

[6] *Васильев М.А.* Сохраняющиеся токи высших спинов в Sp(2M) пространстве-времени// Изв. вуз. физ. 2002 №7, С. 23, arXiv: [hep-th/0204167].

[7] *Bandos I.A.* BPS preons and tensionless superp-brane in generalized superspace// Phys. Lett. B V.558, P.197 (2003), arXiv: [hep-th/0208110].

[8] *Didenko V.E., Vasiliev M.A.* Free field dynamics in the generalized AdS (super)space// J. Math. Phys. V.45, P.197 (2004),arXiv: [hep-th/0301054].

[9] *Plyushchay M., Sorokin D., Tsulaia M.* Higher spins from tensorial charges and OSp(N|2n) symmetry// JHEP V.0304, P.013 (2003), arXiv: [hep-th/0301067].

[10] *Vasiliev M.A.* Higher spin theories and Sp(2M) invariant space-time// arXiv: [hep-th/0301235].

[11] *Bandos I., Pasti P., Sorokin D., Tonin M.* Superfield theories in tensorial superspaces and the dynamics of higher spin fields// JHEP V.0411, P.023 (2004), arXiv: [hep-th/0407180].

[12] *Bandos I., Bekaert X., Azcarraga J.A. de, Sorokin D., Tsulaia M.* Dynamics of higher spin fields and tensorial space// JHEP v.0505, P.031 (2005), arXiv: [hep-th/0501113].

[13] *Ivanov E., Lukierski J.* Higher spins from nonlinear realizations of OSp(1|8)// Phys. Lett. B v.624, P.304 (2005),arXiv: [hep-th/0505216].

[14] *Ivanov E.* Nonlinear Realizations in Tensorial Superspaces and Higher Spins// arXiv: [hep-th/0703056].

[15] *Gelfond O.A., Vasiliev M.A.* Higher Spin Fields in Siegel Space, Currents and Theta Functions// JHEP V.0903, P.125 (2009), arXiv: [0801.2191].

[16] *Gelfond O.A., Vasiliev M.A.* Sp(8) invariant higher spin theory, twistors and geometric BRST formulation of unfolded field equations// JHEP V.0912, P.021 (2009), arXiv: [0901.2176].

[17] *Gelfond O.A., Vasiliev M.A.* Operator algebra of free conformal currents via twistors// Nucl. Phys. B V.876, P.871 (2013), arXiv: [1301.3123].

[18] *Florakis I., Sorokin D., Tsulaia M.* Higher Spins in Hyperspace// JHEP **1407**, 105 (2014), arXiv: [1401.1645].

[19] *Bekaert X., Cnockaert S., Iazeolla C., Vasiliev M.A.* Nonlinear higher spin theories in various dimensions// arXiv: [hep-th/0503128].

[20] *Gelfond O.A., Vasiliev M.A.* Higher rank conformal fields in the Sp(2M) symmetric generalized space-time// Theor. Math. Phys. V.145, P.1400 (2005) [hep-th/0304020].

[21] *Gelfond O.A., Skvortsov E.D., Vasiliev M.A.* Higher spin conformal currents in Minkowski space// Theor. Math. Phys. V.154, P.294 (2008), arXiv: [hep-th/0601106].

[22] *Gelfond O.A., Vasiliev M.A.* Conserved higher-spin charges in AdS_4// Phys. Lett. B V.754, P.187 (2016), arXiv: [1412.7147].

[23] *Klebanov I.R. and Polyakov A.M.*, AdS dual of the critical O(N) vector model// Phys. Lett. B V.550, P.213 (2002) arXiv: [hep-th/0210114].

[24] *Giombi S. and Yin X.*, The Higher Spin/Vector Model Duality// J. Phys. A V.46 (2013) [arXiv:1208.4036 [hep-th]].

[25] *Francesco P. Di, Mathieu P., Senechal D.* Conformal Field Theory. Springer, New York, 1997. doi:10.1007/978-1-4612-2256-9.