

Явление недоразрешенности слоев на примере моделирования вихревых структур в задаче об эволюции двойного сдвигового течения

Ю.М. Куликов, Э.Е. Сон

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Сдвиговые слои часто встречаются в инженерных приложениях (сверхзвуковое смешение в камерах сгорания, затопленные струи), их моделирование является интересным способом проверки используемой численной схемы на разрешение многомасштабных вихревых структур. Адекватность используемого метода должна подтверждаться не только физическим содержанием получаемых результатов, но и тем, что механизм численной диссипации воспроизводит [1] её гидродинамический аналог. В настоящей работе проводилось тестирование численного метода КАБАРЕ, отличительной особенностью которого является отсутствие искусственные диссипативных добавок. Таким образом, основной механизм диссипации оказывается заключен в членах, содержащих физическую вязкость.

Задача об эволюции двойного сдвигового слоя решалась в переменных U , V , ρ в плоской размером 1×1 метр с соответствующими начальными условиями, задаваемыми для консервативных переменных:

$$\begin{aligned} U &= th(\rho(y - 1/4)), y \in [0, 1/2], \\ U &= th(\rho(3/4 - y)), y \in (1/2, 1], \\ V &= \sum_k \delta_k \sin(2\pi k_x x). \end{aligned} \quad (1)$$

На границах расчетной области задаются периодические граничные условия для значений переносимых инвариантов.

При разложении в спектр Фурье по волновым числам применялся как собственный алгоритм обработки дискретного набора данных, так и алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ), являющийся частью библиотеки Intel MKL. Оба алгоритма оптимизированы для работы в системах с общей памятью и используют библиотеку OpenMP. Исходный алгоритм преобразования для консервативных переменных реализован с учетом смещения координат сеточного множества внутрь расчетной области. Таким образом, минимальные волновые числа по каждому направлению определяются размером области и соответствующим шагом сетки:

$$k_x^{\min} = \frac{2\pi}{L_x - \Delta x}, k_y^{\min} = \frac{2\pi}{L_y - \Delta y} \quad (2)$$

Число операций дискретного преобразования в одномерном случае есть $O(N^2)$, а в двумерном - $O(N^4)$, что для сетки 512×512 делает время выполнения операции недопустимо большим. Это обстоятельство потребовало перехода к БПФ (число операций растет как $N \log(N)$), одной из эффективных реализаций [2] которого является алгоритм FFT Intel MKL. Данная подпрограмма также использовалась и для проверки собственного кода. Результатом работы обоих алгоритмов являются матрицы фаз и амплитуд Фурье-компонент, по которым восстанавливается одномерный спектр $E(k)$ в диапазоне $k \in [k^{\min}, k^{\max}]$,

$$\text{где } k^{\min} = \sqrt{(k_x^{\min})^2 + (k_y^{\min})^2}, k^{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{(k_x^{\max})^2 + (k_y^{\max})^2}, \quad (3)$$

в свою очередь $k_x^{\max} = 2\pi/\Delta x$, $k_y^{\max} = 2\pi/\Delta y$. Множитель $1/2$ в выражении для максимального волнового числа k^{\max} возникает как следствие теоремы Котельникова (другие названия - теорема отсчетов, теорема Найквиста-Шеннона).

Полученные спектры преобразования Фурье (рис. 1) всегда имеют три ветви, верхние из которых для обеих реализаций совпадают друг с другом при измельчении сетки. Две нижние ветви дискретного преобразования Фурье следует относить в паразитным модам (убывающая ветвь с началом $E_k \propto 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}^2$, другая с началом в $E_k \propto 10^{-9} \text{ м}^2/\text{с}^2$). Аналогичные “паразитные” моды быстрого преобразования Фурье имеют на несколько порядков меньшие амплитуды. Точка минимума двух верхних ветвей дискретного преобразования и Intel MKL FFT, совпадает с максимальной длиной проекции волнового числа на одну из координатных осей, определяемой теоремой Котельникова (в частности для единичной области $k_x^{\max} = k_y^{\max} = \pi n_x$). На рис. 1 точка А обозначает компоненту нулевой гармоники, точка В соответствует частоте накладываемого возмущения.

В эталонных решениях каждый сдвиговый слой сворачивается в одиночные периодические вихри, в то время как в случае недоразрешения появляются дополнительные свертки завихренности (roll-ups) между основными вихрями, что и происходит на сетке 128×128 . Измельчение расчётной сетки приводит к появлению все новых деталей в основных вихревых структурах и уменьшает влияние “недоразрешенности” слоев, выражающееся в появлении “лишнего” (“паразитного”) вихря. Различие в эволюции процесса вследствие появления этого образования становится существенным при $t = 0.527 \text{ с}$. Данный артефакт исчезает при переходе к сетке 256×256 . Несмотря на полное исчезновение паразитного вихря на сетке 512×512 при числе Рейнольдса $Re = 400000$ для основной гармоники начального возмущения $n = 1$ окончательной сходимости решения не наблюдается, а при дальнейшем измельчении сетки изменяется направление закрутки и относительное расположение мелкомасштабных вихревых образований. Полезно провести оценку качества разрешения вихрей инерционного интервала в зависимости от сетки. Так как завихренность ω сохраняется [3], то отношение крупных вихрей L к мелким l^* составляет

$$\frac{L}{l^*} \propto Re^{1/2} \quad (4)$$

При $Re = 40000$ $L/l^* \propto 633$, тогда, считая, что самый крупный вихрь занимает половину расчетной области, получим $l^* \approx 8 \times 10^{-4} \text{ м}$. Таким образом, значительная часть инерционного интервала не разрешается на сетке 1024×1024 . Для разрешения самого малого вихря инерционного интервала необходимо как минимум две ячейки, что позволяет связать Re с минимальным числом ячеек в одном направлении

$$n_x \approx 4Re^{1/2}, \quad (5)$$

т.е. $Re \approx 65000$ для сетки 1024×1024 .

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ, проект №15-08-00457.

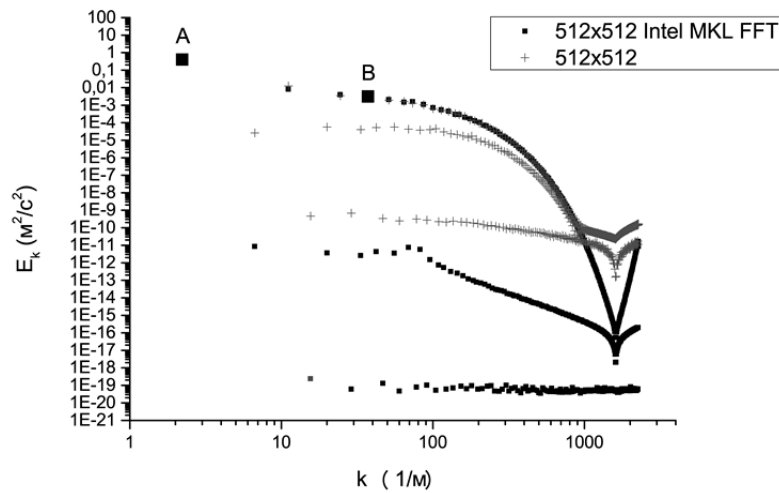


Рис. 1. Преобразование Фурье начальной кинетической энергии выполненное с помощью дискретного алгоритма и БПФ Intel MKL на сетке 512×512 ячеек

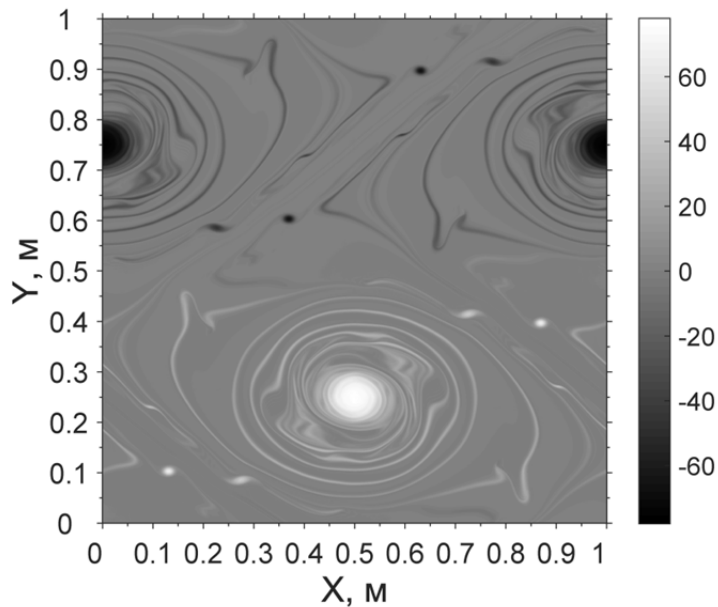


Рис. 2 Картина поля завихренности при поперечном возмущении в виде основной гармоники на сетке 2048×2048 ячеек при $t = 2.635$ с.

Литература

1. *Brown D. L.* Performance of Under-resolved Two-Dimensional Incompressible Flow Simulations // *Journal of Computational Physics*. 1995. V. 122 P. 165.
2. *Intel Math Kernel Library Reference Manual* // Intel Corporation. 2010. P. 3514
3. *Davidson P.* Turbulence: An Introduction for Scientists and Engineers // OUP Oxford. 2004. P. 678.