УДК 531.36:62-50

Безреверсное движение системы двух материальных точек на прямой с сухим трением

П.А. Губко
Московский физико-технический институт (государственный университет)
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

Проблемы динамики и управления движением локомоционных систем, перемещающихся в сопротивляющихся средах за счет изменения конфигурации без специализированных внешних движителей (ног, колес, гусениц, гребных винтов и т.п.), актуальны и важны для инженерной механики и биомеханики. Подобным образом перемещаются животные, не имеющие конечностей (змеи, черви), а также некоторые рыбы (например, угорь). Этот принцип движения можно использовать в искусственных локомоционных системах (мобильных роботах). Создание мобильных роботов с изменяемой конфигурацией требует изучения динамических свойств систем, перемещающихся таким образом, анализа их управляемости, разработки принципов, систем и алгоритмов управления, а также оптимизации параметров конструкции и движения. Важный тип систем с изменяемой конфигурацией – цепочки тел, соединенных между собой поступательными шарнирами. Один из вопросов, который влияет на оптимальность движения, — может ли такая система перемещаться так, чтобы все ее элементы двигались только в одном направлении (без реверса). Эта работа является попыткой ответить на данный вопрос для системы двух тел. Некоторые проблемы оптимального управления системами тел, соединенных поступательными шарнирами, решались, например, в [1, 2].

Рассмотрим систему двух тел. Тела моделируются материальными точками, которые лежат на горизонтальной прямой. Между точками действует произвольная по величине и направлению внутренняя сила f. Между прямой и точками действует сила сухого трения с коэффициентом k, одинаковым для обеих точек. Обозначим через M и m массы материальных точек. Будем считать, что $M > m$. Координата, скорость и ускорение точки с меньшей массой будут обозначаться $x, v, \dot{v}$ соответственно, а точки с большей массой — $y, V, \dot{V}$. Ставится задача переместить систему из покоя в покой вдоль прямой за время T так, чтобы относительные положения точек в начале и в конце движения совпадали, а обе точки двигались только вперед (безреверсно).

Система описывается следующими дифференциальными уравнениями:

$$\dot{x} = v,$$
$$\dot{y} = V,$$
$$m\dot{v} = f + f_{тр},$$
$$M\dot{V} = -f + F_{тр},$$

где $f_{тр}$ и $F_{тр}$ — силы сухого трения тел с поверхностью. Сила $f_{тр}$ описывается функцией

$$f_{тр} = \begin{cases} -kmg \cdot sign(v), & v \neq 0 \\ -f, & v = 0 \quad и \quad |f| \leq kmg \\ -kmg \cdot sign(f), & v = 0 \quad и \quad |f| > kmg \end{cases},$$

сила $F_{тр}$ задается аналогично.

Начальные условия:

$$x(0) = y(0) = 0,$$
$$v(0) = V(0) = 0.$$

Терминальные условия:

$$x(T) = y(T) \neq 0,$$
$$v(T) = V(T) = 0.$$

Условие отсутствия реверса

$$v(t) \geq 0, \quad V(t) \geq 0, \quad t \in [0, T].$$

Выдвигается гипотеза, что решения выписанной системы дифференциальных уравнений с наложенными условиями не существует.

Рассматривается движение системы, состоящее из трех этапов. На первом этапе большее тело покоится, а меньшее разгоняется до некоторой скорости v_*. На втором этапе оба тела движутся вперед до остановки меньшего тела, в конце этого этапа большее тело приобретает скорость V_*. На третьем этапе меньшее тело стоит, а большее движется вперед и в конце третьего этапа останавливается. Перемещения точек M и m на i-ом этапе обозначим через Δx_i и Δy_i соответственно. Разность координат точек в конце движения вычисляется следующим образом:

$$x(T) - y(T) = \sum_{i=1}^{3} (\Delta x_i - \Delta y_i).$$

Можно показать, что при рассматриваемом трехэтапном движении $x(T) - y(T) > 0$.

Для доказательства этого факта найдем минимум $\Delta x_i - \Delta y_i$ на каждом этапе при заданных значениях v_*, V_*. На первом этапе минимальное значение достигается при $f = Mgk$ — максимальной силе взаимодействия точек, при которой меньшее тело ускоряется вперед, а большее тело остается неподвижным. Второй этап происходит следующим образом. В начале этапа часть импульса меньшего тела мгновенно передается большему телу. После этого тела движутся, не взаимодействуя между собой. Часть импульса, переданная большему телу, должна быть такой, чтобы в момент остановки меньшего тела скорость большего тела равнялась V_*. Минимум на третьем этапе достигается при $f = -mgk$ — максимальной по модулю силе взаимодействия тел, при которой меньшее тело остается неподвижным.

Выполнив необходимые вычисления при заданных v_* и V_*, получим

$$\min_u \left(x(T) - y(T) \right) = v_*^2 S(\mu, \eta),$$

$$S(\mu, \eta) = \frac{\mu^2 (1 + 2\eta) + \mu\left(1 - 2\eta - 3\eta^2\right) + \eta^2}{2(1 - \mu^2)},$$

где $\mu = m/M$ и $\eta = V_*/v_*$. Область значения параметров μ и η определяется неравенствами $0 \leq \eta \leq \mu < 1$. Неравенство $\mu < 1$ следует из того, что $m < M$ по условию задачи. Неравенство $\eta \leq \mu$ выполняется, так как в противном случае после передачи доли импульса от меньшего тела к большему, скорость меньшего тела оказалась бы отрицательной, что недопустимо по условию задачи.

Численная минимизация функции $S(\mu, \eta)$ по параметрам μ и η в допустимой области этих параметров показывает, что полученный минимум положителен. Следовательно, условие $x(T) = y(T)$ не может быть выполнено, что доказывает невозможность безреверсного движения системы в рассматриваемом классе стратегий управления.

Исследование выполнено при поддержке РФФИ (проект 14-01-00061).

Литература

1. *Фигурина Т.Ю.* Оптимальное управление движением системы двух тел по прямой // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2007. №2. С. 65-71.
2. *Болотник Н.Н., Фигурина Т.Ю., Черноусько Ф.Л.* Оптимальное управление прямолинейным движением системы двух тел в сопротивляющейся среде // ПММ. 2012. Т. 76. Вып. 1. С. 3-22.