УДК 519.163

Одно свойство систем линейных неравенств

С. Тарасов[1,2]

ФИЦ ИУ РАН, ВЦ РАН им. А.А.Дородницына [1]

Московский физико-технический институт (государственный университет)[2]

Этот текст является реакцией на вопрос, заданный В.К. Леонтьевым (см. [1,2]), который можно сформулировать следующим образом. *На какое минимальное число K совместных подсистем можно разбить несовместную систему из m линейных неравенств в R^n?*

Предложение. *K=2.*

Очевидно, что оценка неулучшаемая.

Доказательство предложения конструктивное. Без ограничения общности можно рассматривать однородные системы и интересоваться наличием нетривиального решения. Будем для удобства называть однородную систему линейных неравенств *совместной*, если она имеет нетривиальное решение, и *несовместной* -- в противном случае. Возьмем произвольную максимальную по включению (тупиковую) совместную подсистему S. По определению, добавление к S любого не входящего в нее неравенства исходной системы $ax \leq 0$ превращает ее в несовместную. По лемме Фаркаша это означает, что ковектор a, попадает во внутренность сопряженного конуса S, и, следовательно, соответствующая подсистема из всех таких векторов $\{a_i, i \notin \mathrm{S}\}$ также имеет нетривиальное решение.

Следствие (ср. с Теоремой 2 из [2]). Любая система из m линейных неравенств имеет совместную подсистему мощности $\lceil\frac{m}{2}\rceil$. Очевидно, что оценка неулучшаемая.

Обсуждение. На самом деле, исходный вопрос В.К. Леонтьева гораздо более содержательный, чем полученный нами ответ, поскольку в нем спрашивается о том, какие значимые характеристики можно извлечь из описаний объектов, которые формально не заданы корректно (несовместные системы уравнений или неравенств и т. п.). Нельзя сказать, что такая проблематика не обсуждалась. Обычно ищутся приближенные решения или проводится *регуляризация,* т. е. каким-то образом определяется объект, похожий на решение. Здесь мы сталкиваемся с известными трудностями, поскольку, например, поиск «максимально хорошего» приближенного решения может оказаться вычислительно трудным. А именно, для систем линейных неравенств нахождения максимальной по мощности совместной подсистемы является NP-трудной задачей. А в методах регуляризации, конечно, можно эффективно найти то, что предлагается считать решением, но априори не понятно, как его интерпретировать в терминах исходной задачи.

С этой точки зрения, в качестве обобщенного решения несовместной системы неравенств можно выдавать какие-то решения произвольной пары ее совместных подсистем из Предложения. Заметим, что в [1,2] аналогичные вопросы рассматриваются для несовместных систем булевых уравнений. Удается разбить несовместную систему из m уравнений на примерно $\ln m$ совместных подсистем. (Проверка совместности булевых уравнений является по модулю частных случаев NP-полной задачей).

Исследование автора выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 14-01-00641.

Литература:

1. *Леонтьев В., Тоноян Г.* О системах булевых уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2013. Т. **53**. № 5. С. 800–807.
2. *Леонтьев В., Тоноян Г.* Приближенные решения систем булевых уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1993. Т. **33**: № 9. С. 1383–1390.