УДК 51-73

Применение статистической регуляризации Турчина для анализа данных физических экспериментов

М.Е. Зелёный[1]
[1]Институт ядерных исследований РАН г. Троицк

При обработке данных физических экспериментов часто возникает задача восстановления спектра по результатам действия на этот спектр некого интегрального оператора (чаще всего мы в результате измерения получаем свертку наблюдаемого спектра с аппаратной функцией прибора). Фактически для этого необходимо решить интегральное уравнение Фредгольма I-рода:

$$f(y) = \int_a^b dx\, K(x,y)\phi(x) \tag{1}$$

где $f(y)$ – результат измерение, $K(x,y)$ – ядро интегрального оператора, $\varphi(x)$ – восстанавливаемый спектр (правильнее будет сказать что нужно решить некоторую алгебраизацию этого уравнения: $f_m = K_{mn}\varphi_n$). Однако эта задача является некорректной по Адамару: малое изменение функции f (ошибка измерения, которая присутствует в любом эксперименте) приводит к сколько угодным большим изменения восстанавливаемого спектра. Одним из способов сделать эту задачу корректной является регуляризация Тихонова [1], однако данный подход имеет ряд недостатков, из которых мы выделим два:

- показано существование параметризованного решения, верного при некоторых значениях параметра, однако не дается способ определения наилучшего значения этого параметра,
- метод не дает способа определить величину ошибки восстановленного спектра.

В данной работе была рассмотрена статистическая регуляризация Турчина[2-5], основанная на байесовом подходе к стратегии регуляризации — минимизации средних потерь, причем усреднение производится не только по апостериорной плотности вероятности $P(\vec{f}|\vec{\varphi})$ но и по априорной плотности — $P(\vec{\varphi})$. Таким образом наилучшая оценка для $\vec{\varphi}$ будет:

$$\langle\varphi_i\rangle = \int_a^b \varphi_i P(\vec{\varphi}|\vec{f})d\vec{\varphi}$$

При этом дисперсия будет равна:

$$\langle\sigma_i\rangle = \int_a^b \sigma_i P(\vec{\varphi}|\vec{f})d\vec{\varphi}$$

В качестве априорной информации мы будем использовать наше знание от том что физические законы в основном описываются гладкими функциями, при этом мы так же потребуем что бы в $P(\vec{\varphi})$ содержалось как можно меньше информации (по Шеннону) о $\vec{\varphi}$. Таким образом мы потребуем выполнение двух условий:

- чтобы наша функция имела некоторое заданное значение математического ожидания функционала гладкости:

$$\int (\vec{\varphi}, \Omega\vec{\varphi})P(\vec{\varphi}|\vec{f})d\vec{\varphi} = \omega,$$

где Ω - некий конечно-разностный функционал гладкости.

- чтобы информация Шеннона была минимальной:

$$I[P(\vec{\varphi})] = \int \ln P(\vec{\varphi})P(\vec{\varphi})d\vec{\varphi} \to min.$$

Полученная оценка будет зависеть от параметра $\alpha = \frac{n}{\omega}$ — для того что бы исключить его мы должны провести дополнительное усреднение по априорной вероятности, либо использовать α, доставляющее максимальное значение условной вероятности $P(\alpha|\vec{f})$. В качестве примера применения данной методики в работе мы рассмотрим несколько модельных примеров, а также восстановим спектр электронов в эксперименте Троцик ν-масс [6].

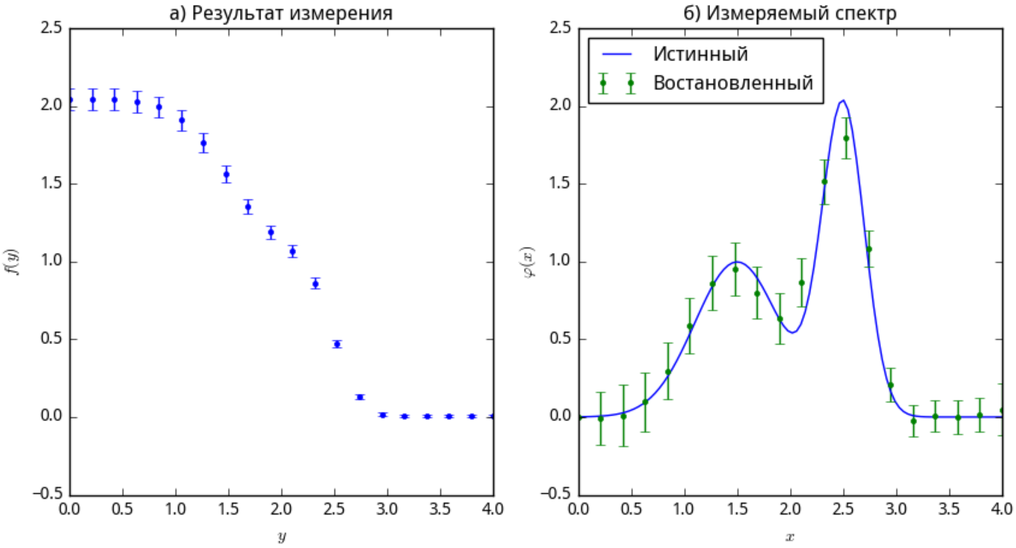

Рис. 1: Моделирование восстановления спектра для ядра-«ступеньки» а) функция f б) истинный и восстановленный спектр

Список литературы

[1] А. Н. Тихонов ДАН СССР, 151б 501 (1963),

[2] В. Ф Турчин. ЖВМ и МФ 7, 1270 (1967).

[3] В. Ф Турчин. ЖВМ и МФ 8, 230 (1968).

[4] В. Ф Турчин, В. З. Нозик, Известия АН СССР, сер. “Физика атомсферы и океана” 5, 29 (1969),

[5] Л. С. Туровцева, Решение некоторых обратных задач физики атмосферы методом статистической решуляризации (1973),

[6] D.N. Abdurashitov [at al.]. Electron scattering on hydrogen and deuterium molecules at 14-25 keV by the "Troitsk nu-mass"experiment – arXiv:1603.04243 [physics.ins-det] (2016).