УДК 338.27

Прогнозирование в экономических системах на примере робастного метода определения бета-коэффициента

В.В. Пронин
Московский физико-технический институт (государственный университет)

В условиях современного мира инвестиционная деятельность во многом является определяющим звеном процесса функционирования всей рыночной экономики в целом как единого механизма. Именно инвестиции способствуют развитию большинства рыночных систем. Соответственно, оптимизация процесса инвестирования принадлежит к числу наиболее актуальных вопросов экономики. В данной работе в качестве объектов исследования выступают различные финансовые инструменты, доступные на соответствующих торговых площадках.

Область исследования и математическая модель

Научный интерес представляет инвестиционный анализ механизма ценообразования акций и возникающая в данном контексте задача оптимального выбора инвестиционного портфеля, получившая название портфельной теории с основополагающим принципом предпочтения инвестора, согласно которому при прочих равных условиях инвесторы предпочитают больший доход и меньший риск [4]. Диверсификация инструментария в этом случае влечет за собой уменьшение риска, поскольку в общем случае стандартное отклонение доходности портфеля будет меньше, чем средневзвешенные стандартные отклонения доходности ценных бумаг, которые составляют этот портфель [5]. Свое развитие теория получила в виде модели ценообразования активов - Capital Asset Pricing Model (CAPM). Эта модель дополнительно включает в себя два ключевых предположения, описывающих совершенный рынок ценных бумаг: одинаковую информированность инвесторов и наличие базового уровня доходности [7].

Ключевая идея модели CAPM состоит в рассмотрении доходности актива как суммы двух составляющих – безрисковой ставки и так называемой премии за риск, которая, вообще говоря, является случайной величиной. Таким образом, основное соотношение имеет вид:

$$R = r_{rf} + (r_m - r_{rf})\beta,$$

где R – ожидаемая доходность актива, r_{rf} – безрисковая ставка, r_m – доходность рынка в целом, а β – коэффициент, отражающий связь доходности отдельного актива с доходностью всего рынка.

Систематический риск не может быть уменьшен, однако его можно компенсировать за счет соответствующей премии за риск, которая определяется как разница между доходностью рыночного портфеля и процентной ставкой по безрисковым активам. На конкурентном рынке ожидаемая премия за риск изменяется прямо пропорционально бета-коэффициенту. Премия за риск по i-й ценной бумаге рассчитывается следующим образом:

$$Pr_i = (r_m - r_{rf})\beta_i$$

Для применения модели CAPM на практике в любом случае используются исторические данные доходности. Бета-коэффициент является основным фактором, отражающим эффект взаимных корреляций доходности бумаг анализируемой компании с доходностью ценных бумаг, обращающихся на данном рынке. Он выражает меру систематического риска для акций компании и характеризует вариабельность ее доходности по отношению к среднерыночной доходности. Величина коэффициента определяется на основе анализа ретроспективных данных статистическими службами, анализирующих мировые фондовые рынки. Значение бета-коэффициента, как правило, близко к единице, и в точности равняется единице, если говорить о рынке в среднем.

Существует достаточное число алгоритмов, позволяющих найти приблизительное значение бета-коэффициента для конкретной ценной бумаги. Классический подход к оценке параметра β в модели CAPM основан на регрессионном анализе доходности акции относительно доходности фондового индекса, т.е. на фондовом методе.

Данный подход к оценке доходности различных российских компаний может быть затруднен по целому ряду причин, и тогда практическое оценивание значений параметров осуществляется по малому количеству данных, не отличающихся достоверностью, что в конечном итоге влечет за собой необходимость трансформации исходной модели данных с детерминированными параметрами в новую, рандомизированную модель данных (РМД).

Пусть проведено s измерений, а вход имеет n параметров. Тогда, согласно теории [2], связь между входом, выходом и ошибками измерений описывается соотношением:

$$v = \boldsymbol{F}[X + \eta, \boldsymbol{a}] + \xi$$

Первый, наиболее общий и часто встречающийся на практике в условиях фондового рынка и рыночной экономики как таковой случай подразумевает непрерывность рандомизированной модели данных и, соответственно, аналогичный характер бета-коэффициента как случайной величины. Тогда объектом оценивания являются функции плотности распределения вероятностей. В этой ситуации вводится функционал правдоподобия, максимизация которого по всем функциям ПРВ из заданного класса и при наличии информации о входе и/или выходе РМД определяет наилучшую оценку [1].

Робастная энтропийная оценка функций плотности распределений вероятностей параметров **a** и шумов η и ξ определяется решением следующий оптимизационной задачи:

$$\mathcal{H}[P(\mathbf{a}, W(\eta), Q(\xi)] \to max,$$

где $\mathcal{H}$ - функционал обобщенной информационной энтропии Больцмана, в который переходит наш функционал правдоподобия путем элементарных преобразований. В нашем случае в качестве РМД-модели выступает CAPM, β – ключевая случайная величина. Добавим к базовой формуле шумы входа и выхода – тоже случайные величины. Получаем следующий общий вид:

$$\boldsymbol{R} = r_{rf} + \beta\,(\boldsymbol{r_m} - r_{rf}) + \boldsymbol{\xi},$$

где s – количество данных в выборке; $\boldsymbol{R}$ – вектор выхода, размерность – s, компоненты – значения доходности актива; r_{rf} – вектор входа, размерность – s, компоненты – безрисковые ставки; β – случайный параметр; $\boldsymbol{r_m}$ – входные данные, размерность – s, компоненты - значения доходности рынка; $\boldsymbol{\xi}$ – шумы выхода, размерность – s.

Таким образом, модель ценообразования активов в непрерывном случае подлежит стандартному рассмотрению как РМД с одним случайным непрерывным по распределению параметром и зашумленным выходом. Тогда задача нахождения плотностей распределений вероятностей случайного параметра и шумов сводится к решению оптимизационной задачи при наборе ограничений и известных классах распределений p, w, q, которые предполагаются известными.

Машинный алгоритм

Однако в современной рыночной экономике неизбежно возникают ситуации, требующие принятия оптимальных решений в несколько иных условиях неопределенности, ведь далеко не всегда параметр модели непрерывен, тогда нас интересует не плотность распределения вероятностей, а дискретное соответствие. По получении закона распределения надо выявить пару значений «интервал + максимальная вероятность», проводя отбор по второму элементу пары. В качестве анализируемого периода будем рассматривать один календарный год, векторы данных снимаем помесячно, что в итоге дает 12 фиксированных значений акций для каждого закрытия и открытия торговой сессии. Дополнительно подчеркнем предположение равномерного распределения шумов строго в линейном интервале [-0,1;0,1]. Задаем точность определения $E\beta$, количество интервалов N для β и df – интервальный шаг. Схема предлагаемого машинного алгоритма, определяющего $E[\beta(t_i)]=F_x(\boldsymbol{r_m}(t_i),\ r_{rf}(t_i),\ \boldsymbol{\xi}(t_i),\ \boldsymbol{R}(t_i))$, *где* F_x – функционал, задаваемый алгоритмом имитационной модели, среднеквадратичное отклонение β *как случайного параметра*, вектор $f(i),\ i=1,\dots,N$ – вероятность попадания β *в* i-й интервал, выполнена по стандартам [3] и представлена на рис.2, включая подпрограмму 1, которая выдает статистику попаданий бета в различные интервалы.

Для практической реализации поставленной задачи были использованы данные из открытых источников, а именно исторические котировки компании «UTair» и ряды значений индекса ММВБ за 2006-2007 гг. - значения стоимости акции на момент открытия и закрытия торгов. Следовательно, для получения значения доходности за один день мы должны величину разности цен открытия и закрытия разделить на цену открытия, чтобы далее получить выборку по доходностям в более удобном виде:

$$R_j = (P_C - P_O)/P_O$$

В качестве безрисковой доходности выбираем величину инфляции за рассматриваемый период. Для оценки целесообразности применения метода энтропийного оценивания логично произвести сравнение фактических результатов применения представленной в работе метода и классического метода линейной регрессии, реализация которого с помощью продукта Excel, входящего в программный пакет Microsoft Office, не вызывает дополнительных сложностей. Единичная имитация чистого регрессионного исследования визуализирована на рис.1.

Коэффициент линии тренда для зависимости доходности акции компании «UTair» от доходности рынка, являющийся оценкой бета-коэффициента первого порядка, составляет 0.2954.

Сопоставление результатов расчетов

В случае если параметр β является непрерывной случайной величиной, распределенной по нормальному закону, решаем задачу с использованием среды разработки MATLAB, используя стандартную надстройку Optimization Toolbox, и получаем следующие результаты: $E[\beta]$=0.3150 при дисперсии 1.6442. В свою очередь, при дискретности бета-коэффициента как случайного параметра исследуемой модели в той же компьютерной среде разработанный алгоритм при df=0.05, N = 200 и рассматриваемом отрезке [-5;5] позволяет нам получить идентификатор интервала 117. Соответственно, в реальных условиях рыночной неопределенности мы принимали бы какое-либо решение на перспективу, исходя из уточненного прогноза - среднего значения коэффициента по найденному интервалу [0,30;0,35]., т.е. 0,325. Значение 0.3150 из непрерывного случая принадлежит найденному по результатам работы машинного имитационного алгоритма интервалу из закона распределения - проверка успешна; пример показателен.

Заключение

Нам удалось формально описать модель ценообразования финансовых активов как рандомизированную, с ключевым случайным параметром и зашумленными выходными данными, и представить алгоритм прогнозирования ее ключевого параметра на основе метода робастно-энтропийного оценивания. Проведено демонстрационное исследование реальных финансовых активов российского рынка акций. На примере конкретного финансового инструмента подход реализован практически, с использованием выборки данных из открытых источников.

Конечные результаты, полученные с использованием разработанного алгоритма, реализующего масштабный теоретический подход к решению задачи современной экономики, могут быть использованы для прогнозирования будущей доходности финансовых активов и принятия взвешенных инвестиционных решений в условиях неопределенности различными субъектами рынка.

Одним из возможных направлений развития работы может являться оценка степени необходимой корректировки решений со стороны субъектов финансового рынка в сторону оптимальности в различных рыночных ситуациях в зависимости от внешних условий и глобальных тенденций на фондовом рынке.

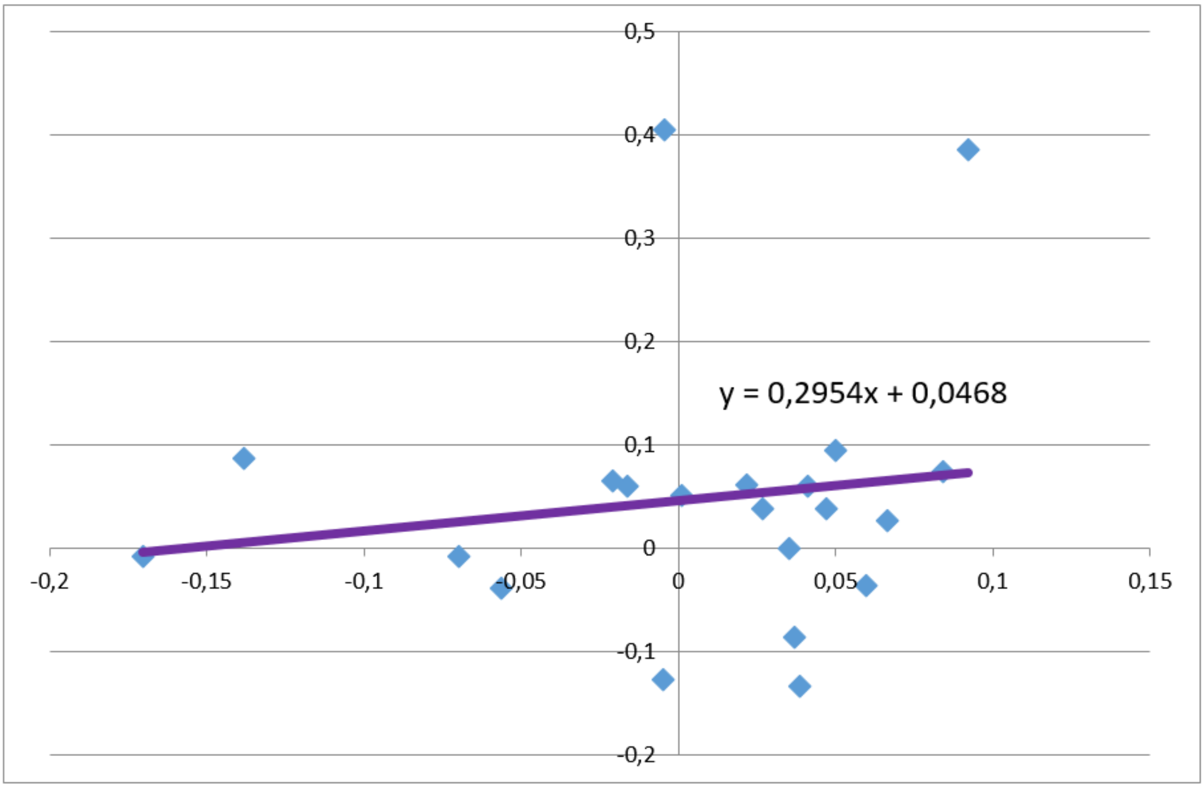

Рис. 1. Зависимость доходности акции компании «UTair» от доходности индекса ММВБ

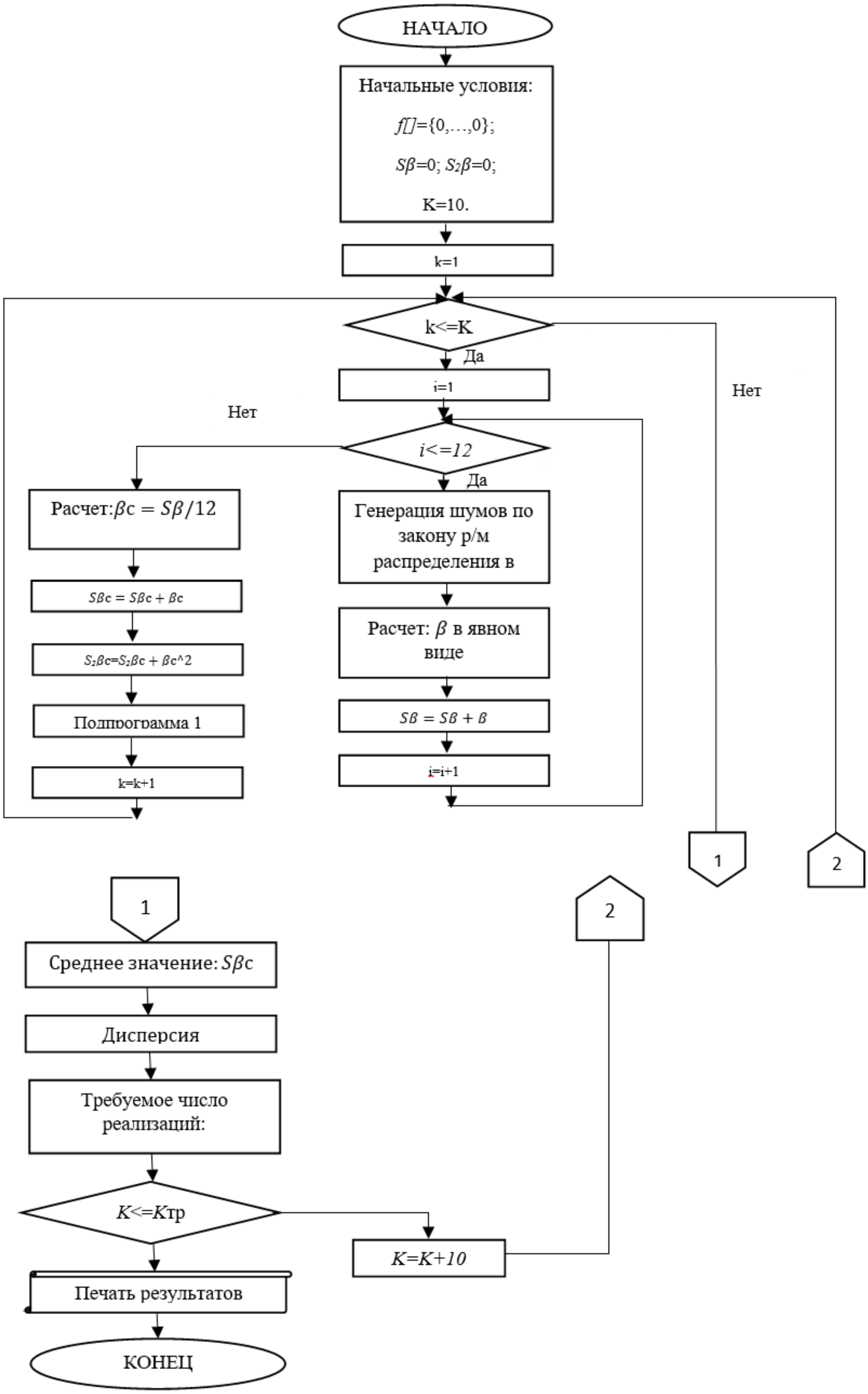

Рис. 2. Пошаговая схема предлагаемого вычислительного алгоритма

Литература

1. *Попков Ю.С.*, *Лысак Ю.Н.* Оценивание характеристик рандомизированных статических моделей данных (энтропийно-робастный подход) // Автоматика и телемеханика. 2013. С.118.

2. *Попков Ю.С.* Теория макросистем. Равновесные модели. / Изд. 2-е. М.: Либроком. 2013. С.47.

3. *Новицкий В. О., Карпов В. И.* Методология исследования и моделирования сложных систем управления для предприятий и компаний зернового сектора АПК. // Информационные технологии. М.: Изд-во «Новые технологии». 2010. № 9. С.50-52.

4. *Markowitz Harry.* Portfolio Selection // The Journal of Finance, Vol. 7, N. 1. P. 77-91.

5. *Sharpe William.* Portfolio Theory and Capital Markets. McGraw-Hill Trade. 1970. P.16-17.

6. *Fama Eugene F. and French Kenneth R.* The Capital Asset Pricing Model: Theory and Evidence. // CRSP Working Paper N. 550; Tuck Business School Working Paper N. 03-26. 2003. P. 29.