

УДК 517.977.5

## О задаче синтеза субоптимального управления системой несинхронных осцилляторов\*

*А.А. Галяев<sup>1,2</sup>, П.В. Лысенко<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>Московский физико-технический институт (государственный университет)

<sup>2</sup>Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

### Введение

В данной работе рассмотрена задача синтеза субоптимального управления системой несинхронных осцилляторов. Подобные задачи рассматривались достаточно большим количеством авторов в различных постановках. Математические постановки могут отличаться размерностью системы, критериями оптимизации, присутствием ограничений и нелинейностей.

Задача оптимального быстродействия для линейных систем второго порядка при симметричных ограничениях на управление достаточно полно рассмотрена в классических публикациях, например, в [1]. Там же обсуждаются подходы к решению задач оптимального быстродействия для нелинейных систем второго порядка. Задачи быстродействия и оптимизации импульса, переданного системе, однонаправленным ограниченным управлением изложены в [2]. Задача остановки группы осцилляторов, находящихся на одной платформе, рассматривается в [3]. Задача оптимального быстродействия по остановке физического маятника изучается в [4].

Отметим, что задачи оптимального управления многомерными объектами часто оказываются слишком сложными. В них могут возникать трудноразрешимые условия оптимальности, особые режимы и другие проблемы при решении. В этих случаях целесообразно использовать

---

\*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-08-01285 а).

более простые субоптимальные управления, основанные на приближенных соотношениях, предположениях о поведении возмущений, допущениях о числе переключений и т.п. Например, в [5] для нелинейных лагранжевых систем с несколькими степенями свободы предложены субоптимальные по быстрдействию законы управления, основанные на декомпозиции. Указанные подходы не являются оптимальными, но используют элементы оптимизации времени движения.

В данной работе решается задача быстрдействия для задачи управления системой несинхронных осцилляторов, находится программное управление, по которому производится синтез субоптимального управления (оптимального в заданном классе количества переключений управления).

## Постановка задачи оптимального управления системой несинхронных осцилляторов

Многомерный объект ассоциируется с группой независимых осцилляторов с собственными частотами колебаний равными  $\omega_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . В каждый из осцилляторов введено управляющее воздействие  $u$ , ограниченное по модулю  $|u| \leq \epsilon$ . Уравнения динамики системы осцилляторов будут иметь вид

$$\begin{cases} \dot{q}_i(t) = p_i(t), & i = 1, \dots, N \\ \dot{p}_i(t) = -\omega_i^2 q_i(t) + u(t), & i = 1, \dots, N \end{cases} \quad (1)$$

где  $q_i$  - положение соответствующего маятника, а  $p_i$  - его импульс.

На управление наложено ограничение

$$|u| \leq \epsilon, \quad (2)$$

$$u \in \mathcal{L}_\infty(0, T).$$

Возмущение будем понимать в смысле изменения состояния осциллятора, полагая что в начальный момент времени  $t = 0$  каждый осциллятор не возбуждён, т.е. находится в нулевом положении, обладая нулевой скоростью движения. Это означает, что начальные условия для уравнений динамики (1) задаются в виде

$$q_i(0) = 0, \quad p_i(0) = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (3)$$

Целью задачи управления группой осцилляторов является её перевод в некоторый момент времени  $T$  в состояние с фазовыми координатами

$$q_1(T) = 0, p_1(T) = 1, q_i(T) = 0, p_i(T) = 0, i = 2, \dots, N \quad (4)$$

где момент времени  $T$  неизвестен.

Задача оптимизации формулируется следующим образом:

Необходимо найти такую тройку  $(q_i^*(t), p_i^*(t), u^*(t))$  при  $i = 1, 2$ , которая доставляет минимум критерию

$$J_0 = T \rightarrow \min_u$$

При наличии ограничений, задаваемых выражениями (2)–(4).

## Решение задачи оптимального управления системой несинхронных осцилляторов

В [6] показано, что система 1 является управляемой и приведено решение задачи быстродействия. Закон оптимального управления задается в виде

$$u^*(t) = \varepsilon \operatorname{sign} \sum_{i=1}^N \psi_i(t). \quad (5)$$

Переключение управления происходит в моменты времени  $\tau_k$ , такие что  $\sum_{i=1}^N \psi_i(\tau_k) = 0$ , а сама функция  $\sum_{i=1}^N \psi_i(t)$  меняет знак. Общее решение системы (1) после моментов переключения представляется следующим образом:

$$\begin{cases} q_i(t) = \left( q_i(\tau_k) - \frac{u^*}{\omega_i^2} \right) \cos(\omega_i(t - \tau_k)) + \frac{p_i(\tau_k)}{\omega_i} \sin(\omega_i(t - \tau_k)) + \frac{u^*}{\omega_i^2}, \\ p_i(t) = -\omega_i \left( q_i(\tau_k) - \frac{u^*}{\omega_i^2} \right) \sin(\omega_i(t - \tau_k)) + p_i(\tau_k) \cos(\omega_i(t - \tau_k)), \quad i = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (6)$$

Введем обозначение

$$\Theta(\omega_i t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega_i t) & \sin(\omega_i t) \\ -\sin(\omega_i t) & \cos(\omega_i t) \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Тогда выражения (6) переписываются в матричном виде

$$\begin{pmatrix} q_i(t) \\ p_i(t) \\ \omega_i \end{pmatrix} = \Theta(\omega_i(t - \tau_k)) \begin{pmatrix} q_i(\tau_k) \\ p_i(\tau_k) \\ \omega_i \end{pmatrix} + [E - \Theta(\omega_i(t - \tau_k))] \begin{pmatrix} \frac{u^*}{\omega_i^2} \\ \omega_i^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где  $E$  – единичная матрица. Система (8) приводится к дискретному виду, когда значения фазовых координат вычисляются в дискретные моменты времени  $\tau_k$ , а затем и в финальный момент времени  $T$ :

$$\begin{pmatrix} \frac{q_i(\tau_{k+1})}{\omega_i} \\ \frac{p_i(\tau_{k+1})}{\omega_i} \end{pmatrix} = \Theta(\omega_i(\tau_{k+1} - \tau_k)) \begin{pmatrix} \frac{q_i(\tau_k)}{\omega_i} \\ \frac{p_i(\tau_k)}{\omega_i} \end{pmatrix} + [E - \Theta(\omega_i(\tau_{k+1} - \tau_k))] \begin{pmatrix} \frac{u^*(\tau_k + 0)}{\omega_i^2} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Для матрицы вида (7) справедливо соотношение

$$\Theta(\omega_i t_1) \Theta(\omega_i t_2) = \Theta(\omega_i(t_1 + t_2)). \quad (10)$$

Как показано в [6], общее решение представимо в таком виде:

$$\begin{pmatrix} \frac{q_i(T)}{\omega_i} \\ \frac{p_i(T)}{\omega_i} \end{pmatrix} = \left[ E + (-1)^{M+1} \Theta(\omega_i T) - 2 \sum_{k=1}^M (-1)^{k+1} \Theta(\omega_i(T - \tau_{M+1-k})) \right] \begin{pmatrix} \frac{u^*(+0)}{\omega_i^2} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Моменты переключения управления находятся из решения следующих двух систем:

$$\begin{aligned} 1 + \left[ \Theta(\omega_i T) \left( (-1)^{M+1} E - 2 \sum_{k=1}^M (-1)^{M-k} \Theta(-\omega_i \tau_k) \right) \right]_{11} &= 0, \\ \left[ \Theta(\omega_i T) \left( (-1)^{M+1} E - 2 \sum_{k=1}^M (-1)^{M-k} \Theta(-\omega_i \tau_k) \right) \right]_{21} &= 0, \quad i = 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (12)$$

где нижний двойной индекс означает соответствующий элемент квадратной матрицы, записанной в квадратных скобках.

$$\begin{aligned} 1 + \left[ \Theta(\omega_1 T) \left( (-1)^{M+1} E - 2 \sum_{k=1}^M (-1)^{M-k} \Theta(-\omega_1 \tau_k) \right) \right]_{11} &= 0, \\ \left[ \Theta(\omega_1 T) \left( (-1)^{M+1} E - 2 \sum_{k=1}^M (-1)^{M-k} \Theta(-\omega_1 \tau_k) \right) \right]_{21} &= \pm \frac{\omega_1^2}{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (13)$$

Нелинейные системы (12), (13) содержат  $2N$  уравнений с  $M + 1$  неизвестными. Поэтому для разрешимости этих уравнений в общем случае требуется как минимум выполнение условия

$$M \geq 2N - 1. \quad (14)$$

Совместное решение системы (12), (13) определяет моменты переключения управления, посредством которого группа осцилляторов приводится в требуемое положение. Полученное решение должно удовлетворять следующим требованиям:

- 1) на моменты  $\tau_k$  наложены ограничения  $\tau_k < \tau_{k+1} < T$ ;
- 2)  $\inf T$  по всем решениям дает наилучшее решение задачи при фиксированном количестве переключений управления.

### Задача синтеза

Поскольку функции  $\psi_i(t)$  являются линейной комбинацией соответствующих синусов и косинусов как функций времени, то их можно выразить через текущие обобщенные координаты. Система (8) может быть записана в виде

$$\begin{pmatrix} q_i(t) - \frac{u^*(\tau_k + 0)}{\omega_i^2} \\ \frac{p_i(t)}{\omega_i} \end{pmatrix} = \Phi(q_i(\tau_k), p_i(\tau_k)) \Theta(\omega_i \tau_k) \begin{pmatrix} \cos(\omega_i t) \\ \sin(\omega_i t) \end{pmatrix}, \quad (15)$$

где

$$\Phi(q_i(\tau_k), p_i(\tau_k)) = \begin{pmatrix} q_i(\tau_k) - \frac{u^*(\tau_k + 0)}{\omega_i^2} & \frac{p_i(\tau_k)}{\omega_i} \\ \frac{p_i(\tau_k)}{\omega_i} & - \left( q_i(\tau_k) - \frac{u^*(\tau_k + 0)}{\omega_i^2} \right) \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Заметим, что  $\det \Phi(q_i(\tau_k), p_i(\tau_k)) = - \left( q_i(\tau_k) - \frac{u^*(\tau_k + 0)}{\omega_i^2} \right)^2 - \frac{p_i^2(\tau_k)}{\omega_i^2} \leq 0$ . Если хотя бы одно из слагаемых, входящих в детерминант не равно нулю, то существует обратная матрица  $\Phi^{-1}(q_i(\tau_k), p_i(\tau_k))$ . Следовательно, такая ситуация возможна, если в моменты переключения управления  $p_i(\tau_k) \neq 0$ . Выразим вектор  $(\cos(\omega_i t), \sin(\omega_i t))^T$  из системы (16) и получим

$$\begin{pmatrix} \cos(\omega_i t) \\ \sin(\omega_i t) \end{pmatrix} = \Theta(-\omega_i \tau_k) \Phi^{-1}(q_i(\tau_k), p_i(\tau_k)) \begin{pmatrix} q_i(t) - \frac{u^*(\tau_k + 0)}{\omega_i^2} \\ \frac{p_i(t)}{\omega_i} \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Далее, все функции, входящие в уравнения (17), – это непрерывные функции времени. Поэтому структура матриц  $\Phi^{-1}(q_i(\tau_k), p_i(\tau_k))$  будет такой, чтобы условие непрерывности соблюдалось. Сопряженные функции находятся следующим образом:

$$\psi_i(t) = (a_i, b_i) \Theta(-\omega_i \tau_k) \Phi^{-1}(q_i(\tau_k), p_i(\tau_k)) \begin{pmatrix} q_i(t) - \frac{u^*(\tau_k + 0)}{\omega_i^2} \\ \frac{p_i(t)}{\omega_i} \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Обозначим через  $H_k$ ,  $k = 0, \dots, M$ , где  $\tau_0 = 0$ , набор квадратичных форм

$$H_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left( q_i(t) - \frac{u^*(\tau_k + 0)}{\omega_i^2}, \frac{p_i(t)}{\omega_i} \right) \Theta(-\omega_i \tau_k) \Phi^{-1}(q_i(\tau_k), p_i(\tau_k)) \begin{pmatrix} q_i(t) - \frac{u^*(\tau_k + 0)}{\omega_i^2} \\ \frac{p_i(t)}{\omega_i} \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Составим из векторов  $(a_i, b_i) \in \mathbb{R}^2$ ,  $i = 1, \dots, N$ , вектор  $C = (a_1, b_1, \dots, a_N, b_N) \in \mathbb{R}^{2N}$ . Тогда условие переключения управления в (5) принимает вид  $(C, \nabla H_k) = 0$ , а закон оптимального управления переписывается следующим образом

$$u^*(t, p, q) = \varepsilon \operatorname{sign}(C, \nabla H_k). \quad (20)$$

Здесь  $\nabla H_k = \left( \frac{\partial H_k}{\partial q_i}, \omega_i \frac{\partial H_k}{\partial p_i} \right)$ . Индекс  $k$  увеличивается на единицу после переключения управления. Вектор  $C$  лежит в ортогональном подпространстве к набору векторов  $\Omega_k = (\cos(\omega_1 \tau_k), \sin(\omega_1 \tau_k), \dots, \cos(\omega_N \tau_k), \sin(\omega_N \tau_k))^T$ ,  $k = 1, \dots, M$ , т.е.

$$(C, \Omega_k) = 0, \quad k = 1, \dots, M. \quad (21)$$

## Демонстрация метода. Примеры.

### Пример 1

Предположим, что задана система, состоящая из трех осцилляторов. Выберем частоты осцилляторов  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega_2 = \sqrt{2}$ ,  $\omega_3 = \sqrt{3}$ , а границу управляющего параметра равной  $\varepsilon = 0,125$ . Положим  $M = 2 \cdot 3 - 1 = 5$ . Совместное решение систем (12), (13) дает последовательность моментов времени, представляемую с точностью до десяти значащих цифр,  $\tau_1 = 2,389537463$ ,  $\tau_2 = 5,735704793$ ,  $\tau_3 = 9,412194384$ ,

$\tau_4 = 10,27879840$ ,  $\tau_5 = 14,52303717$ ,  $T = 16,35265615$ . Нужно заметить, что вследствие нелинейности систем (12), (13) данная последовательность не является единственным решением. Например, существует решение  $\tau_1 = 3,943370106$ ,  $\tau_2 = 5,227302333$ ,  $\tau_3 = 9,711839655$ ,  $\tau_4 = 11,28052124$ ,  $\tau_5 = 15,60979863$ ,  $T = 16,92254851$ , и т.д. Однако из всех решений систем (12), (13) следует выбрать последовательность с меньшим значением  $T$ . На рис. 1 показан закон управления как функция времени. Фазовые портреты траекторий представлены на рис. 2. На рис. 2 видно, что траектории всех подсистем стартуют из начала координат, далее траектории подсистем 2 и 3 возвращаются в исходное положение, а траектория 1-й подсистемы приходит в точку с координатами  $(p_1(T), q_1(T)) = (1, 0)$ , решая задачу управления системой, состоящей из трех независимых осцилляторов со скалярным управлением и пятью переключениями управления.

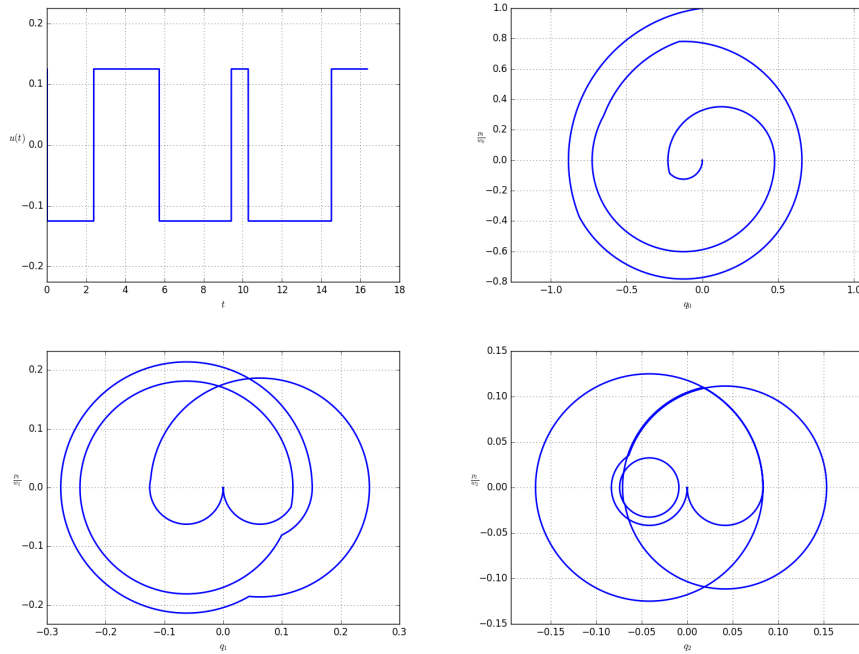


Рис. 1: Вид управления и фазовых портретов для трёх осцилляторов при  $\epsilon = .125$

Набор векторов  $\Omega_k$   $k = 1, \dots, 5$  задается матрицей

$$\Omega = \begin{pmatrix}
 -0,7302864270 & 0,8538387179 & -0,9999208278 & -0,6569573429 & -0,3763655212 \\
 0,6831410795 & -0,5205376488 & 0,01258324468 & -0,7539277483 & 0,9264712594 \\
 -0,9718765560 & -0,2546926631 & 0,7354387657 & -0,3887266621 & -0,1180479752 \\
 -0,2354908912 & 0,9670220511 & 0,6775911908 & 0,9213531257 & 0,9930078930 \\
 -0,5426498859 & -0,8728644947 & -0,8284647057 & 0,5009027324 & 0,9997602696 \\
 -0,8399589879 & -0,4879626768 & -0,5600412765 & -0,8655035833 & 0,02189528146
 \end{pmatrix}$$

Вектор  $C$ , лежащий в ортогональном подпространстве к набору векторов  $\Omega_k$ , следуя (21), равен

$$C = (-0,4814434481, -0,2663212251, -0,5752270457, 0,3231864615, -0,3452689016, 1).$$

Полученное решение не будет являться оптимальным, поскольку сумма тригонометрических функций  $\sum_{i=1}^3 \psi_i$ , определяемая вектором  $C$ , имеет восемь нулей на интервале  $[0, T]$ , а не пять.

Далее формируем квадратичные формы, определяемые (19). Получаем, что

$$H_0 = (8q_1+1)(q_1+1/8) - 8p_1^2 + (16q_2+1)(q_2+1/16) - 8p_2^2 + (24q_3+1)(q_3+1/24) - 8p_3^2,$$

$$H_1 = 2,4851q_1^2 - 0,621267500q_1 - 2,7598p_1q_1 + 0,3449775p_1 - 2,4851p_1^2 + 5,2997q_2^2 - 0,66246125q_2 + 1,198602605p_2q_2 - 0,07491275120p_2 - 2,649786540p_2^2 + 6,979q_3^2 - 0,581583993q_3 + 6,493210752p_3q_3 - 0,2705515302p_3 - 2,326356648p_3^2 + 0,07164697193,$$

и т.д. Последовательность форм задается последовательностью моментов переключения управления, а именно: первое переключение происходит вследствие выполнения  $(C, \nabla H_0) = 0$ , второе —  $(C, \nabla H_1) = 0$  и т.д. Следует заметить, что не каждый момент времени  $(C, \nabla H_k) = 0$  является моментом переключения управления. Однако для каждой из форм в конкретной задаче управления можно определить номер для такого события.

## Пример 2

Продемонстрируем применимость метода для произвольного числа осцилляторов. Пусть теперь  $N = 5$ . Выберем частоты осцилляторов  $\omega_1 = 1, \omega_2 = \sqrt{2}, \omega_3 = \sqrt{3}, \omega_4 = 2, \omega_5 = 3$ , а границу управляющего параметра равной  $\epsilon = 1$ . Решение системы в этом случае даёт

$$\begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \\ \tau_7 \\ \tau_8 \\ \tau_9 \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.61008551 \\ 5.22618226 \\ 9.73808693 \\ 13.70111928 \\ 14.0878282 \\ 14.70156716 \\ 15.30535553 \\ 19.6024249 \\ 23.88086371 \\ 24.08340682 \end{pmatrix}$$



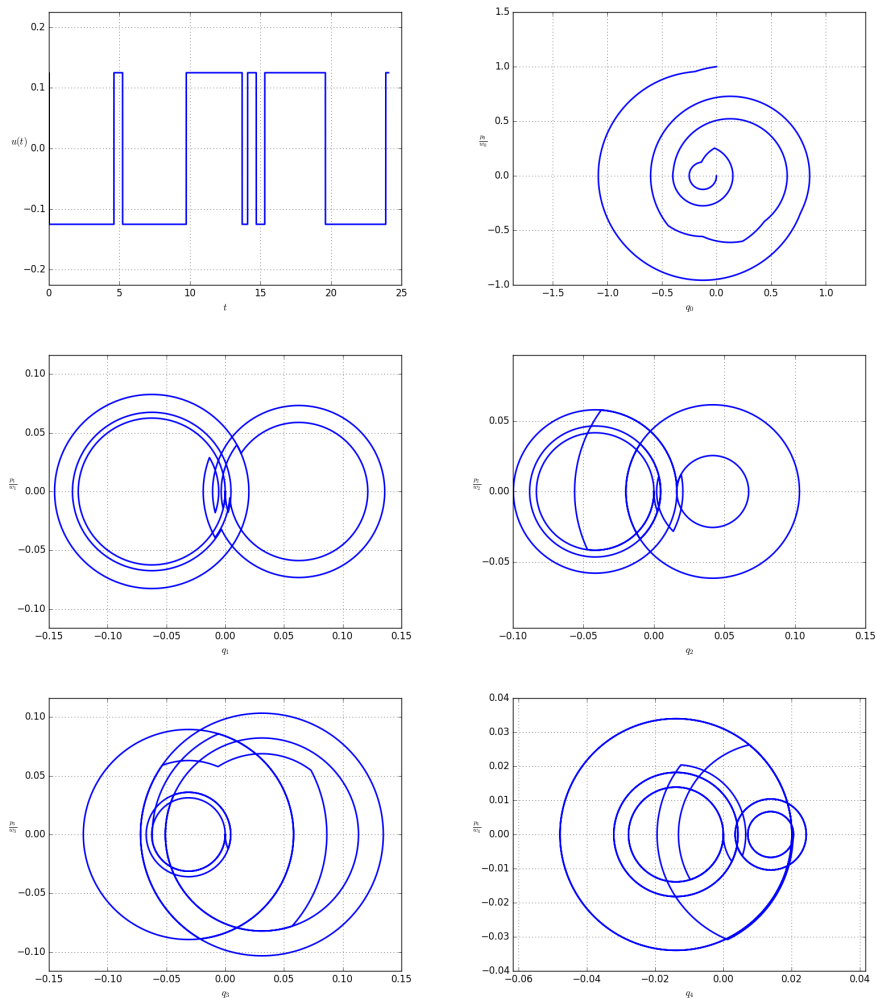


Рис. 2: Вид управления и фазовых портретов для пяти осцилляторов при  $\epsilon = 0.125$

## Заключение

В данной работе были получены следующие результаты:

- Исследована задача быстродействия для ограниченного скалярного управления системой несинхронных осцилляторов при заданных граничных условиях и получено программное управление.
- Произведен синтез субоптимального управления по полученному программному управлению.
- Разработан алгоритм расчета решений и проведено их моделирование. Особенность состоит в универсальности алгоритма, который может быть применим для решения целого спектра подобных

задач с разными краевыми условиями, ограничениями на управление и количеством осцилляторов.

## Список литературы

- [1] *Болтянский В.Г.* Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969.
- [2] *Галяев А.А.* Задача оптимального управления осциллятором с целью обнуления его энергии при ограничении на управляющее воздействие // *АиТ.* 2009. № 3. С. 24–33.  
*Galyaev A.A.* Problem of Optimal Oscillator Control for Nulling its Energy under Bounded Control Action // *Autom. Remote Control.* 2009. V. 70. No. 3. P. 366–374.
- [3] *Prourzin V.A.* A Constrained Scalar Control for the Motion of a System of Oscillators with Damping Residual Oscillations // *J. computer and systems sciences international.* 2007. V. 46. No. 4. P. 521–531.
- [4] *Решмин С.А., Черноусько Ф.Л.* Оптимальный по быстродействию синтез управления нелинейным маятником // *Изв. РАН. Теория и системы управления.* 2007. № 1. С. 13–22.
- [5] *Черноусько Ф.Л.* Синтез управления нелинейной динамической системой // *Прикл. матем. и механика.* 1992. Т. 56. Вып. 2. С. 179–191.
- [6] *Галяев А.А.* Скалярное управление группой несинхронных осцилляторов // *АиТ.* 2016. № 9. С. 3–18.