

Создание инверсии населённости квантовой точки сверхосциллирующим полем соседних точек.

И. В. Доронин, А. А. Пухов, Н. М. Щелкачев, А. П. Виноградов

Институт теоретической и прикладной электродинамики

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Исследуется явление сверхосцилляций ближних полей при ферстеровском обмене энергией между квантовыми двухуровневыми системами. Показано, что система различных низкочастотных возбужденных ДУС может инвертировать высокочастотную ДУС. Причиной этого являются колебания Раби высокочастотной ДУС в сверхосциллирующем поле низкочастотных ДУС, испытывающих безрадиационную спонтанную релаксацию.

Введение

Явление сверхосцилляций заключается в существовании функций с ограниченным спектром, которые могут осциллировать на конечном интервале времени с частотой, превышающей максимальную частоту её спектра. Впервые это явление было описано в статьях [1-3], и нашло широкое применение в различных областях, таких как квантовая физика [1-7], оптика [8-11], радиолокация [12-13] и теория информации [14-15].

Известно, что платой за такое сверхосциллирующее поведение является большие по сравнению с амплитудой сверхосцилляций амплитуды низкочастотных гармоник, составляющих функцию.

В данной работе исследуется возможность передачи энергии от системы низкочастотных возбужденных квантовых ДУС невозбужденной высокочастотной квантовой ДУС, взаимодействующей с ними. Показано, что, несмотря на то, что квант энергии, запасенный в каждой из низкочастотных ДУС меньше кванта энергии, необходимого для возбуждения высокочастотной ДУС (с учетом ширин линий) при одновременном безрадиационном переходе низкочастотных ДУС возможно перевести высокочастотную ДУС в инвертируемое состояние. Однако, как и в классическом случае, платой за создание сверхосциллирующих ближних полей является необходимость вложения достаточно большой энергии: запас низкочастотной энергии должен существенно превосходить энергию возбуждения высокочастотной ДУС.

Основные уравнения

Пусть в субволновом объеме имеется ДУС с частотой перехода ω_B (далее высокочастотная ДУС) и n групп по N ДУС с меньшими частотами $\omega_1, \dots, \omega_n \leq 0.9\omega_B$. В дальнейшем будем называть их базисными, низкочастотными ДУС. Поскольку они

находятся в субволновом объеме, будем учитывать только диполь-дипольное взаимодействие между центральной ДУС и базисными. Взаимодействие базисных ДУС между собой не учитываются.

Предполагаем, что выполняется марковское приближение и гамильтониан системы выбран в виде гамильтониана Джейнса–Каммингса [17]. Гамильтониан системы в этом случае будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
 H &= H_0 + H_{\text{int}}, \\
 H_0 &= \sum_{\substack{j=1,\dots,n \\ i=1,\dots,N}} \hbar \omega_{ij} \hat{\sigma}_{ij}^+ \hat{\sigma}_{ij} + \hbar \omega_B \hat{\sigma}^+ \hat{\sigma} \\
 H_{\text{int}} &= \sum_{\substack{j=1,\dots,n \\ i=1,\dots,N}} \hbar \Omega_{ij} (\hat{\sigma} + \hat{\sigma}^+) (\hat{\sigma}_{ij} + \hat{\sigma}_{ij}^+)
 \end{aligned} \tag{1}$$

где Ω_j — константы связи базисной ДУС из j -ой группы с центральной $j = 1, \dots, n$, $\hat{\sigma}^+$ и $\hat{\sigma}$ — операторы возбуждения и девозбуждения центральной ДУС, $\hat{\sigma}_{ij}^+$ и $\hat{\sigma}_{ij}$ — операторы перехода базисной ДУС из j -ой группы. Операторы инверсии населённости $\hat{D} = \hat{\sigma}^+ \hat{\sigma} - \hat{\sigma} \hat{\sigma}^+$ i -ой ДУС в j -ой группе обозначим $\hat{D}_{i1}, \dots, \hat{D}_{in}$, а высокочастотной \hat{D} . При этом, как следует из изложения в [17], поле, действующее на центральную ДУС, в квантовом представлении имеет вид $\hat{E} = \sum_{\substack{j=1,\dots,n \\ i=1,\dots,N}} \hbar \frac{\Omega_{ij}}{\rho_{ab}} (\hat{\sigma}_{ij} + \hat{\sigma}_{ij}^+)$, где ρ_{ab} — матричный элемент дипольного момента центральной ДУС. Заметим, что гамильтониан (1) не учитывает возможность многоквантовых переходов, но могут происходить переходы с нарушением «закона сохранения энергии».

Запишем уравнения Гейзенберга [18] для $\hat{\sigma}, \hat{\sigma}_1, \dots, \hat{\sigma}_n$ и $\hat{D}, \hat{D}_1, \dots, \hat{D}_n$. Ниже мы полагаем $\hbar = 1$ и измеряем время в периодах осцилляций Берри: $t = t\omega_B$. Индекс, соответствующий

Перейдём к численной форме, считая, что $\langle \hat{\sigma} \hat{\sigma}_j \rangle = \langle \hat{\sigma} \rangle \langle \hat{\sigma}_j \rangle = \sigma \sigma_j$. При расчётах все базисные ДУС в рамках одной группы будут считаться идентичными (имеют одинаковый дипольный момент, начальное состояние, константу связи с центральной ДУС), поэтому уравнение для одной из них полностью описывает динамику всей группы, следовательно, индекс i можно опустить, а суммирование по i можно заменить умножением на N . В результате, получаем систему уравнений.

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{dt} &= -i\omega_B\sigma + Ni\sum_{j=1}^n\Omega_jD(\sigma_j + \sigma_j^*) - \gamma\sigma; \\
\frac{dD}{dt} &= 2Ni\sum_{j=1}^n\Omega_j(\sigma_j + \sigma_j^*)(\sigma - \sigma^*) - 2\gamma(D+1); \\
\frac{d\sigma_j}{dt} &= -i\omega_j\sigma_j + i\Omega_jD_j(\sigma + \sigma^*) - \gamma_j\sigma_j, j=1, \dots, n; \\
\frac{dD_j}{dt} &= 2i\Omega_j(\sigma + \sigma^*)(\sigma_j - \sigma_j^*) - 2\gamma_j(D_j + 1), j=1, \dots, n;
\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь ω_j и Ω_j обезразмерены, а $\omega_B = 1$. Последний член в каждом уравнении соответствует затуханию.

Сверхосцилляции Берри ближних полей

Оценим характерные масштабы. Величина дипольного момента может достигать значения $\sim 145 D$, (радомин R800 [19]) расстояния между ДУС примем равными $\sim 20 \text{ нм}$, тогда $\hbar\Omega \sim \frac{d^2}{r^3} \sim 10^{-14} \text{ эрг}$, $(1.45 \cdot 10^{-15})^2 / (2 \cdot 10^{-6})^3 = 2.1 \cdot 10^{-30} / 8.0 \cdot 10^{-18} = 2.6 \cdot 10^{-13}$ следовательно, $\Omega \sim 3.0 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}$. Для квантовых точек оптической частоты $\omega_j \sim 10^{15} \text{ с}^{-1}$. Таким образом, получаем, что $\Omega_j \ll |\omega_B - \omega_n|, \gamma \ll |\omega_B - \omega_n|, \gamma_j \ll |\omega_B - \omega_n|$, в дальнейшем эти соотношения учтены при выборе параметров системы. Далее для простоты полагаем, что $\gamma = 0.001, \gamma_j = 0.001, j = 1, \dots, n$.

Сначала подберём параметры системы так, чтобы поле, создаваемое базисными ДУС в точке, в которой будет находиться центральная ДУС, сверхосциллировало при отсутствии центральной ДУС. Примем $n = 5, N = 1$. Пусть начальное состояние таково, что $D(0) = -1, D_j(0) = 0.9, j = 1, \dots, 5$. Тогда значения $|\sigma|, |\sigma_j|$ определяются соотношениями $|\sigma(0)| = \sqrt{(1 - D(0))(1 + D(0))} / 2$, поэтому $|\sigma(0)| = 0, |\sigma_j(0)| \approx 0.218, j = 1, \dots, 5$. Выберем прочие параметры системы следующим образом:

$\omega_1 = 0.18$	$\arg(\sigma_1) = -0.089$	$\Omega_1 = 9.1 \times 10^{-3}$
$\omega_2 = 0.36$	$\arg(\sigma_2) = -0.18$	$\Omega_2 = 3.4 \times 10^{-2}$
$\omega_3 = 0.54$	$\arg(\sigma_3) = -0.27$	$\Omega_3 = 6.0 \times 10^{-2}$
$\omega_4 = 0.72$	$\arg(\sigma_4) = -0.36$	$\Omega_4 = 6.7 \times 10^{-2}$
$\omega_5 = 0.90$	$\arg(\sigma_5) = -0.45$	$\Omega_5 = 5.6 \times 10^{-2}$

В отсутствие центральной ДУС удается создать ближнее поле, обладающее свойствами сверхосцилляций. Поле в точке нахождения центральной ДУС испытывает высокочастотные осцилляции с частотой ω_B , см. Рис. 1 сплошная жирная линия. Однако, как видно из рисунка, добавление центральной, высокочастотной ДУС существенно

изменяет поле, создаваемое базисными ДУС. Обратное влияние оказывается столь сильным, что меняет частоту колебаний (см. Рис. 1 сплошная тонкая линия), поэтому достичь желаемого результата не удастся рис. 2. Этому есть две причины.

Во-первых, для усиления воздействия базисных ДУС на центральную нужно, с одной стороны, делать константы связи Ω_j высокими, а с другой стороны, высокие константы связи означают, что базисные ДУС в свою очередь находятся под сильным влиянием центральной.

Во-вторых, существенной особенностью такой квантовой системы является то, что сверхосцилляций создаются в системе, где имеется ограничение не только по максимальной частоте, но и по энергетике, а именно, каждая гармоника содержит лишь один квант. Начальную энергию систему можно найти как $\sum_{j=1, \dots, n} D_j(0) \hbar \omega_j \approx 2 \hbar \omega_B$, что по порядку величины совпадает с энергией перехода центральной ДУС. Очевидно, чтобы влияние центральной ДУС на базисные было не слишком сильным, необходимо, чтобы выполнялось соотношение $\sum_{j=1, \dots, n} D_j(0) \hbar \omega_j \gg \hbar \omega_B$. Сделать это можно только одним способом — увеличением количества базисных ДУС.

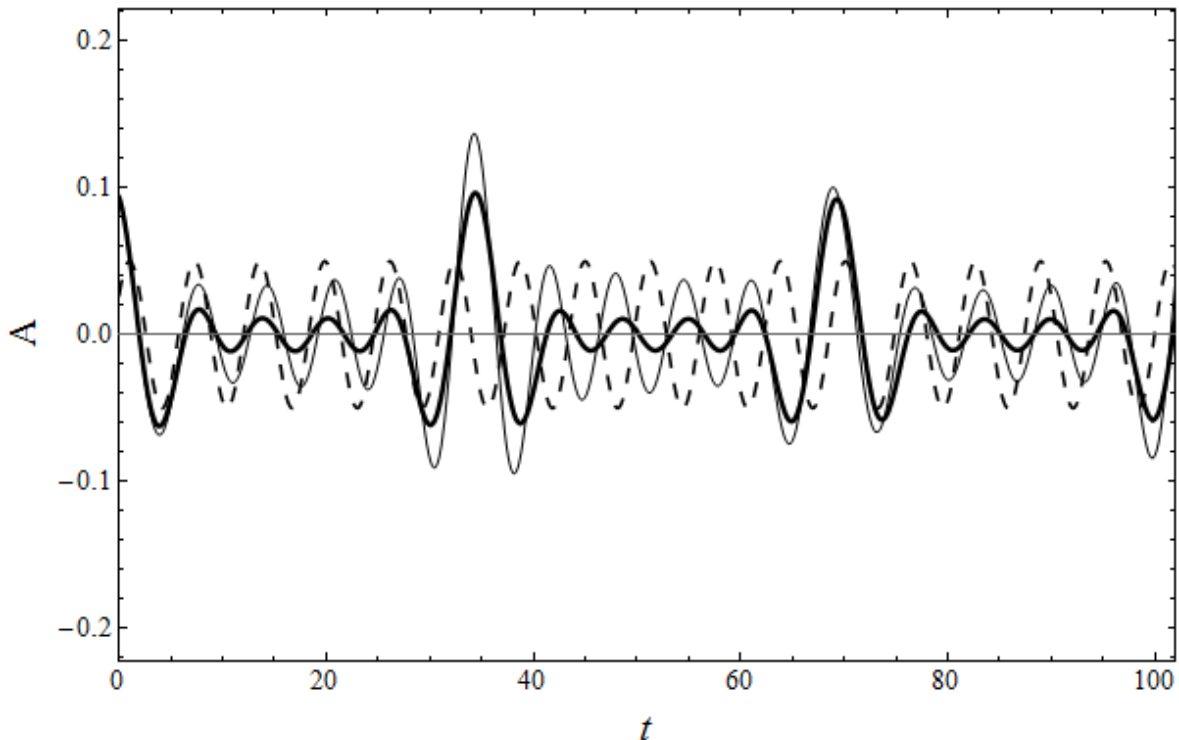


Рис. 1. Поле, создаваемое базисными ДУС. По вертикальной оси отложена безразмерная амплитуда поля. По горизонтальной оси отложено безразмерное время. Сплошная жирная линия — в отсутствии центральной ДУС. Сплошная тонкая линия — в присутствии центральной ДУС. Для сравнения пунктиром изображён $\cos(\omega_B t + \varphi)$.

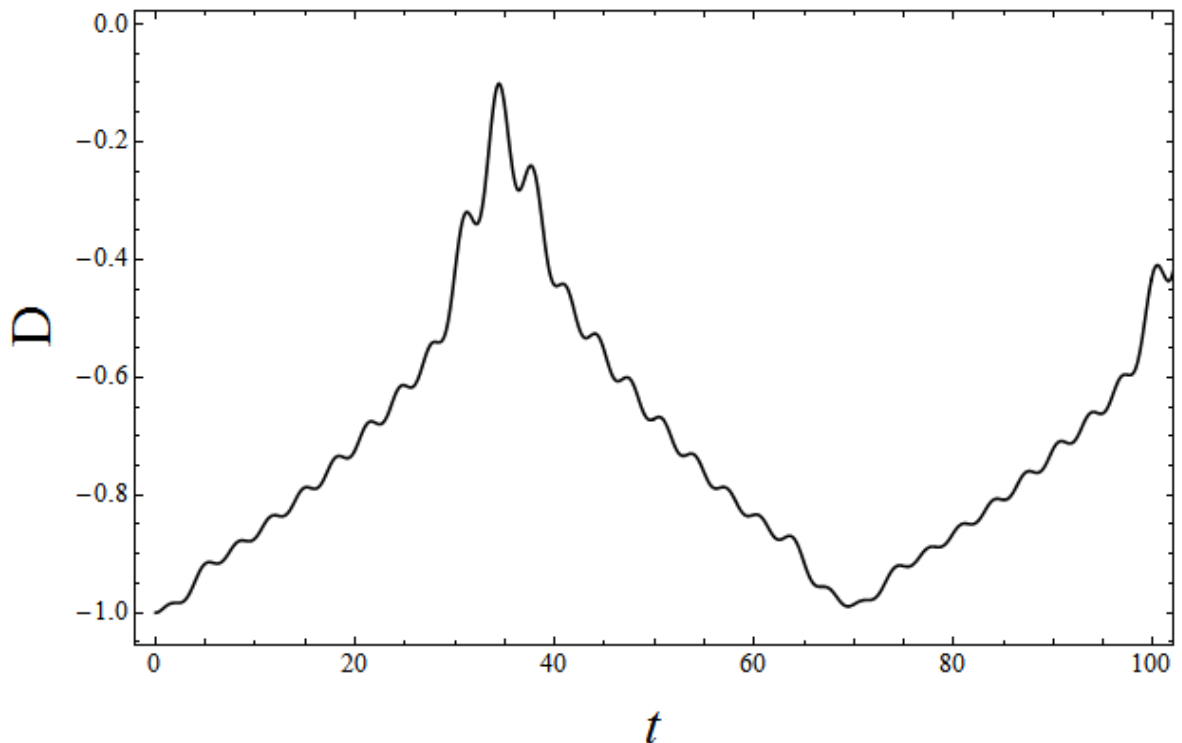


Рис. 2. Динамика инверсии населённости центральной ДУС. По горизонтальной оси отложено безразмерное время.

Оптимизация сверхосцилляций.

Для получения положительной инверсии необходимо как увеличить величину поля, действующего на центральную ДУС так и уменьшить поле, действующее на каждую из базисных ДУС. Рассматривая группы из N одинаковых ДУС, мы как раз этого добиваемся. Константа взаимодействия каждой группы ДУС с центральной возрастает в N раз, в то время как константа взаимодействия центральной ДУС с одной из базисных остается малой.

Нашей целью является подобрать начальные условия и параметры системы таким образом, что бы при взаимодействии центральной ДУС с полем базисных ДУС наблюдался процесс, аналогичный осцилляциям Раби. Очевидно, что сложением ближних низкочастотных полей, возникающих при релаксации низкочастотных ДУС, сверхосцилляции возможно получить лишь на конечном интервале времени. Если длина этого интервала сравнима с временем возбуждения центральной ДУС, т.е. с обратно пропорционально частоте возникших осцилляциям Раби, то в дальнейшем центральная ДУС выйдет из режима осцилляциям Раби и будет просто релаксировать. Иными словами, инверсия населённости сохранится на какое-то время.

Выберем $N=10$. В качестве начальных условий для центральной ДУС примем:

$$D(0) = -1; \text{ (невозбужденная ДУС).}$$

$$|\sigma(0)| = \sqrt{(1-D(0))(1+D(0))}/2 = 0;$$

Константы связи выберем равными $\Omega_1, \dots, \Omega_4 = 0.01$.

Меняя прочие параметры системы в пределах

$$0.3 < \omega_1, \dots, \omega_4 < 0.9$$

$$-\pi < \arg(\sigma_1), \dots, \arg(\sigma_4) < \pi$$

$$-1 < D_1(0), \dots, D_4(0) < 1$$

попытаемся достичь $D(t) > 0$ на продолжительном интервале времени, большем, чем период осцилляций Раби при взаимодействии отдельной группы ДУС с центральной ДУС.

Для расчета были выбраны следующие параметры:

$\omega_1 = 0.378$	$\arg(\sigma_1) = 2.40$	$D_1(0) = 5.15 \times 10^{-2}$
$\omega_2 = 0.558$	$\arg(\sigma_2) = 2.42$	$D_2(0) = -2.04 \times 10^{-2}$
$\omega_3 = 0.744$	$\arg(\sigma_3) = 1.64$	$D_3(0) = 1.53 \times 10^{-1}$
$\omega_4 = 0.900$	$\arg(\sigma_4) = -0.43$	$D_4(0) = 1.48 \times 10^{-1}$

Модули операторов $\hat{\sigma}, \hat{\sigma}_j$ определяются соотношениями

$$|\sigma_j(0)| = \sqrt{(1-D_j(0))(1+D_j(0))}/2, j = 1, \dots, 4.$$

Заметим, что довольно низкие значения начальных инверсий базовых ДУС связаны с необходимостью увеличения частоты Раби, которая пропорциональна амплитуде поля.

Максимальное значение полей низкочастотных ДУС пропорционально $\sum_j \Omega_j$ и достигается при $D_j(0) = 0 \quad j = 1, \dots, 4$;

Динамика такой системы изображена на рис. 3-5. Из рис. 3 видно, что время возбуждения центральной ДУС порядка пяти периодов Берри осцилляций. Иными словами частота ее Раби колебаний порядка $0.2\omega_B$, что порядка ожидаемой частоты Раби колебаний $\sum_j 10\Omega_j \approx 0.4$. Более того длина цуга осцилляций Берри совпадает со временем возбуждения центральной ДУС. На рис. 4 изображена зависимость поля от времени. Спектры участка колебаний полей до момента возбуждения центральной ДУС, достигаемого при $t \approx 30$, изображен на рис. 6, а на рис. 7 после возбуждения. Видно, что до момента возбуждения мы имеем цуг Берри колебаний, а после этого момента интенсивность Берри – гармоники резко упала. Так как Осцилляции на частоте перехода центральной ДУС имеют низкую амплитуду, поэтому осцилляции Раби прекращаются, то в дальнейшем высокочастотная ДУС находится в возбуждённом состоянии на протяжении

времени, много большего обратной частоты Раби (рис. 4). Для сравнения нарисована динамика инверсной населенности центральной ДУС, вызванная воздействием лишь с одной группой базисной ДУС.

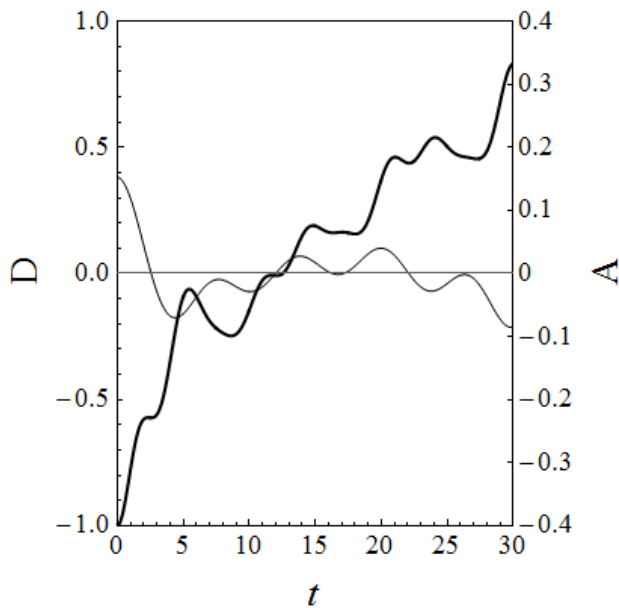


Рис. 3. Динамика инверсии населённости центральной ДУС до первого максимума инверсии. По оси абсцисс отложено безразмерное время. Жирная сплошная линия — инверсия населённости центральной ДУС (шкала слева). Тонкая сплошная линия — амплитуда поля, создаваемого базисными ДУС в точке, в которой находится центральная ДУС (шкала справа).

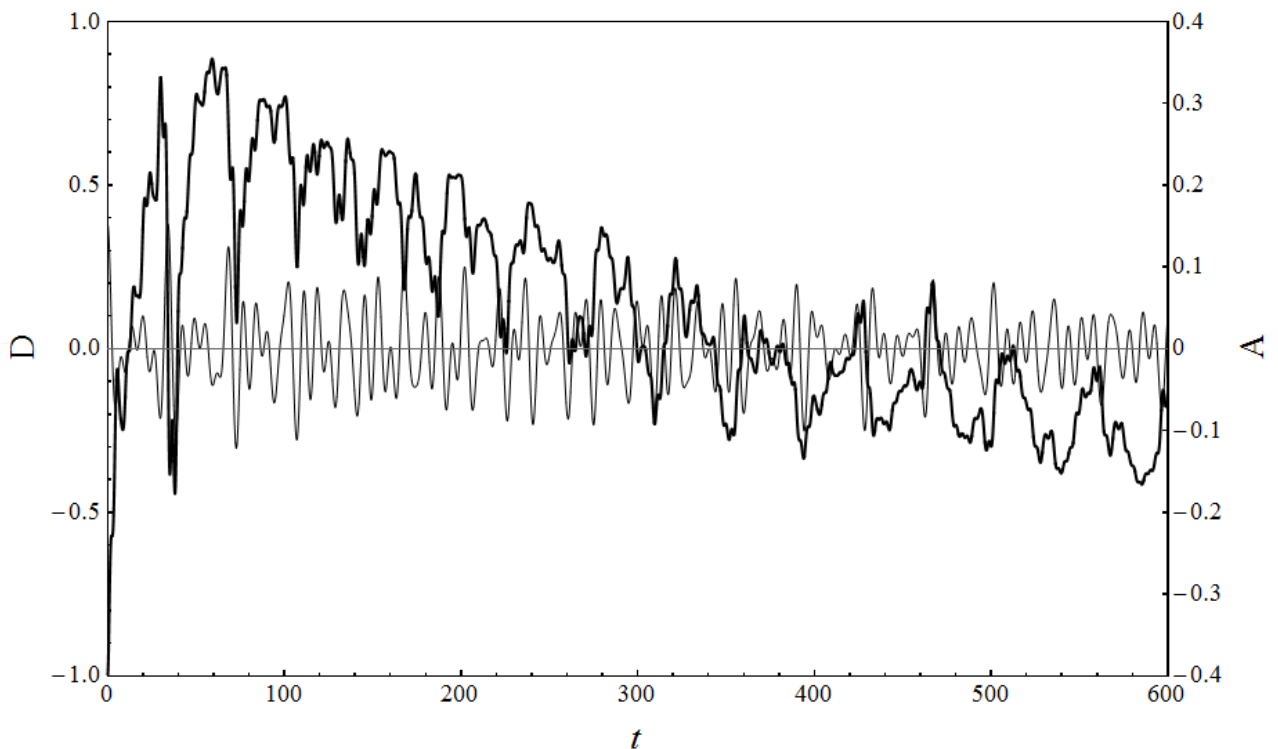


Рис. 4. Динамика инверсии населённости центральной ДУС. По оси абсцисс отложено безразмерное время. Жирная сплошная линия — инверсия населённости центральной

ДУС (шкала слева). Тонкая сплошная линия — амплитуда поля, создаваемого базисными ДУС в точке, в которой находится центральная ДУС (шкала справа).

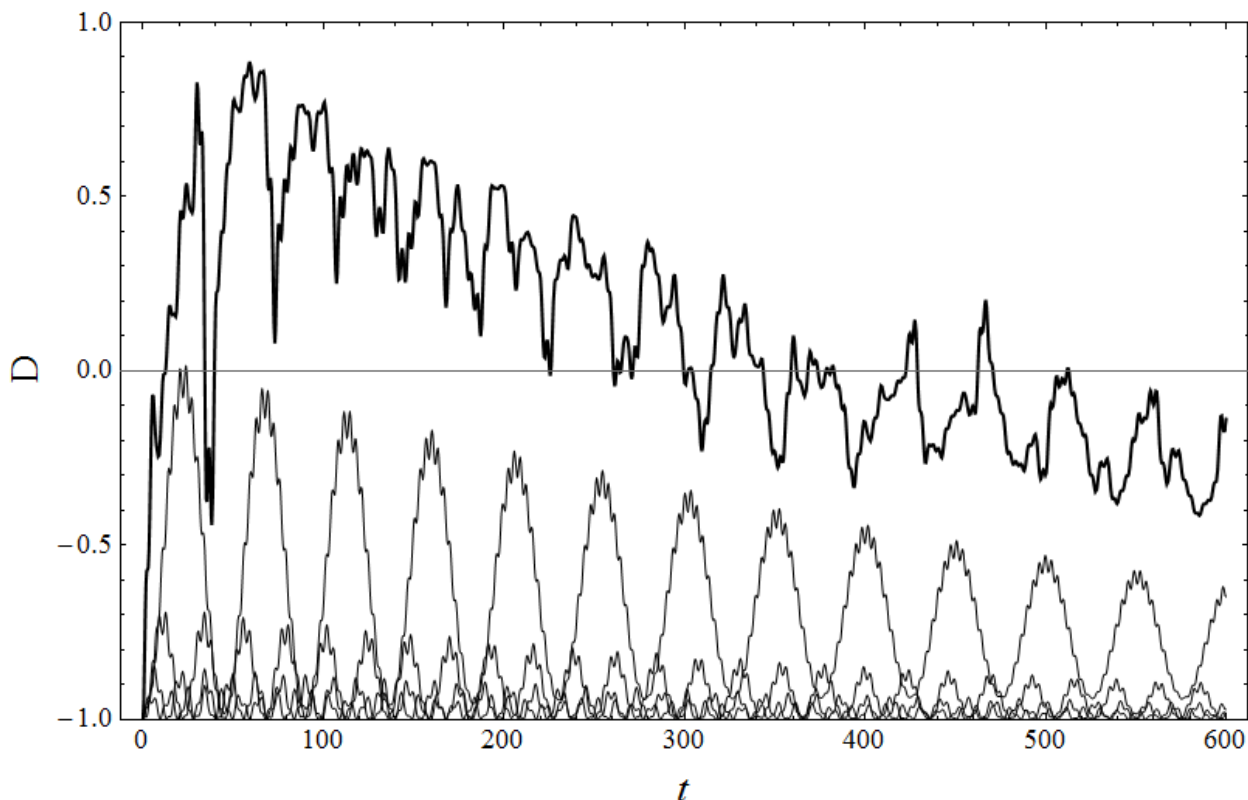


Рис. 5. Динамика инверсии населённости центральной ДУС. По оси абсцисс отложено безразмерное время. По оси ординат отложена инверсия населённости центральной ДУС. Инверсия населённости центральной ДУС в системе с указанными параметрами обозначена жирной сплошной линией. Каждая из тонких линий изображает динамику инверсии населённости центральной ДУС в присутствии отдельных групп базисных ДУС.

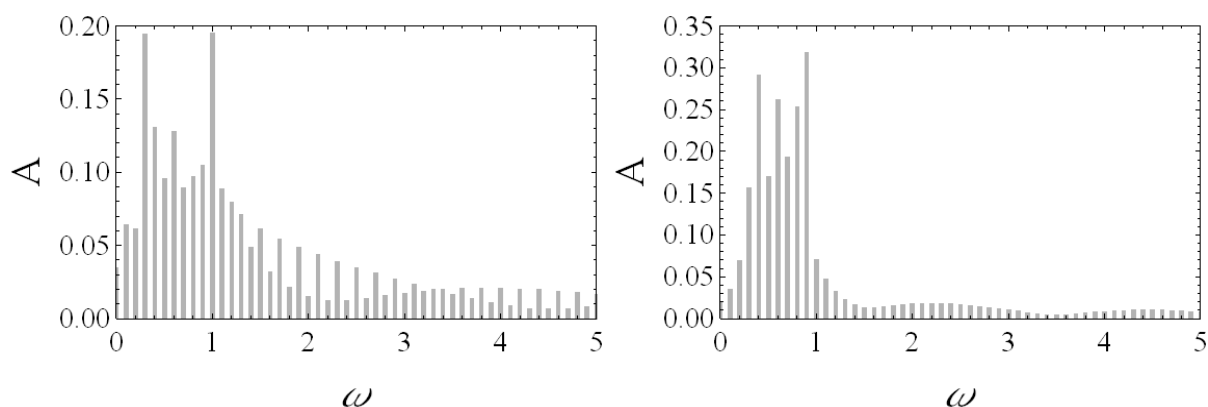


Рис. 6. (слева) Фурье спектр поля, создаваемого базисными ДУС в точке, в которой находится центральная ДУС, до достижения первого максимума инверсии населённости. На частоте перехода $\omega_b = 1$ имеется локальный максимум спектра.

Рис. 7. (справа) Фурье спектр поля, создаваемого базисными ДУС в точке, в которой находится центральная ДУС, после достижения максимума инверсии населённости (интервал времени от 40 до 100 на рисунке 3).

Заключение

Показано, что данное явление связано с возбуждением колебаний Раби высокочастотной ДУС в сверхосциллирующих ближних поля спонтанно релаксирующих низкочастотных ДУС.

Параметры системы подобраны так, что цуг сверхосцилляций заканчивается в момент возбуждения высокочастотной ДУС. Иными словами, переход высокочастотной ДУС в нижнее состояние осуществляется не резонансно, за время порядка обратной частоты Раби, а при спонтанном излучении фотона за время жизни верхнего состояния.

Литература

- [1] Y. Aharonov, D. Albert, L. Vaidman, "How the result of measurement of a component of the spin of a spin 1/2 particle can turn out to be 100", Phys. Rev. Lett. 60 (1988), 1351-1354.
- [2] Y. Aharonov, L. Vaidman, "Properties of a quantum system during the time interval between two measurements", Phys. Rev. A, 41,(1990), 11-20.
- [3] M. V. Berry, "Evanescent and real waves in quantum billiards and Gaussian beams", J. Phys. A: Math. Gen., vol. 27, no. 11, pp. L391– L398, 1994.
- [4] M. V. Berry, 1994, in Quantum Coherence and Reality; in celebration of the 60th Birthday of Yakir Aharonov ed. J.S.Anandan and J. L. Safko, World Scientific, Singapore, pp 55-65.
- [5] A. Kempf, "Black holes, bandwidths and Beethoven", J. Math. Phys., vol. 41, no. 4, pp. 2360–2374, Apr. 2000.
- [6] A. Kempf and P. J. S. G. Ferreira, "Unusual properties of superoscillating particles", J. Phys. A: Math. Gen., vol. 37, pp. 12067-12076, Dec. 2004.
- [7] M. V. Berry and S. Popescu, "Evolution of quantum superoscillations and optical superresolution without evanescent waves", J. Phys. A: Math. Gen., Vol. 39 ,pp. 6965–6977, 2006.
- [8] N. I. Zheludov, "What diffraction limit?", Nature Materials, vol. 7, pp. 420–422, June 2008.
- [9] F. M. Huang and N. I. Zheludov, "Super-Resolution without Evanescent Waves", Nano Letters, vol. 9, no 3 , pp. 1249–1254, 2009.
- [10] Z. Zalevsky, "Super-Resolved Imaging: Geometrical and Diffraction Approaches", Springer Verlag, Springer Briefs in Physics 2011.
- [11] N. I. Zheludov, "The Next Photonic Revolution", J. Opt. A: Pure Appl", Opt.,vol. 11, 110202, 2011.

- [12] A.M.H. Wong and G.V. Eleftheriades, "Superoscillatory Radar Imaging: Improving Radar Range Resolution Beyond Fundamental Bandwidth Limitations", *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, Vol. 22, no. 3, pp. 147–149, 2012.
- [13] A.M.H. Wong and G.V. Eleftheriades, "Adaptation of Schelkunoffs superdirective antenna theory for the realization of superoscillatory antenna arrays", *IEEE Antennas Wireless Propag. Lett.*, vol. 9, pp. 315318, Apr. 2010
- [14] P. J. S. G. Ferreira and A. Kempf, "The energy expense of superoscillations", in *Signal Process. XI Theories Applicat.: Proc. EUSIPCO-2002 XI Eur. Signal Process. Conf.*, Toulouse, France, Sep. 2002, vol. II, pp. 347–350.
- [15] P. J. S. G. Ferreira and A. Kempf, "Superoscillations: Faster Than the Nyquist Rate", *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 54, no. 10, (2006) pp. 3732-3740
- [16] D Baranov, A Vinogradov, and A Lisyansky, "Abrupt Rabi oscillations in a superoscillating electric field", *Opt. Lett.* 39, 6316 (2014).
- [17] Скалли М.О., Зубайри М.С. Квантовая оптика. М.: Физматлит, 2003
- [18] J. J. Sakurai (1993); *Modern Quantum mechanics (Revised edition)*, ISBN 978-0201539295
- [19] K. Sekiguchi, S. Yamaguchi, T. Tahara, "Formation and dissociation of rhodamine 800 dimers in water: steady-state and ultrafast spectroscopic study," *The Journal of Physical Chemistry A*, vol. 110, pp. 2601-2606, (2006)