УДК 533.9.01

Нелинейные взаимодействия волн на бета-плоскости в магнитной гидродинамике тонкого слоя плазмы со свободной границей в поле силы тяжести

Д.А. Климачков[1,2], А.С. Петросян[1,2]

[1]Московский физико-технический институт (государственный университет)

[2]Институт космических исследований РАН

Введение

Поведение различных звезд и планет описывается магнитной гидродинамикой вращающихся тонких слоев плазмы со свободной границей в поле силы тяжести. Например, течения солнечного тахоклина (тонкого слоя внутри Солнца, находящегося над конвективной зоной), динамика атмосфер нейтронных звезд, течения аккрецирующей материи в нейтронных звездах, захваченные приливами экзопланеты с магнитоактивными атмосферами. Для описания таких течений астрофизической плазмы используется магнитогидродинамическое приближение мелкой воды и квазигеострофическое приближение в магнитной гидродинамике. Настоящая работа посвящена изучению слабонелинейных волновых взаимодействий в магнитогидродинамическом приближении мелкой воды при наличии вращения. Уравнения вращающейся магнитной гидродинамики в приближении мелкой воды являются альтернативой магнитогидродинамическим уравнениям тяжелой жидкости со свободной границей в случае, когда исследуется слой малой толщины по отношению к характерному горизонтальному линейному размеру задачи, и вертикальными ускорениями можно пренебречь. Рассматривается слой несжимаемой невязкой жидкости со свободной поверхностью, находящийся в поле сил тяжести, в неинерциальной системе отсчета, вращающейся вместе с плазмой. Эффекты, вызванные различием в угловой скорости вращения, описываются введением приближения бета-плоскости, в котором угловая скорость линейно зависит от широты.

Магнитогидродинамические уравнения мелкой воды получаются из классических уравнений магнитной гидродинамики несжимаемой плазмы осреднением по глубине в предположении гидростатичности распределения давлений и малости толщины слоя по отношению к характерному горизонтальному линейному размеру задачи. Полученная система играет такую же важную роль в космической и астрофизической плазме, как и классические уравнения мелкой воды в гидродинамике нейтральной жидкости. В работе эта система модернизирована для описания течений с внешним вертикальным магнитным полем. Вертикальная динамика магнитогидродинамических течений в приближении мелкой воды с внешним вертикальным магнитным полем значительно отличается от случая без вертикального магнитного поля. В традиционном выводе магнитогидродинамических уравнений мелкой воды из полной системы трехмерных уравнений магнитной гидродинамики вертикальная составляющая магнитного поля принимается равной нулю. Наличие вертикального магнитного поля приводит к существенным изменениям горизонтальной динамики магнитного поля в приближении мелкой воды. Горизонтальное магнитное поле соленоидально для случая течений без внешнего магнитного поля, в присутствие же внешнего вертикального магнитного поля это не так. Вертикальные изменения магнитного поля отличны от нуля, и условие бездивергентности содержит вертикальную составляющую, поэтому для полного описания динамики магнитного поля, в систему добавлено уравнение для вертикального изменения магнитного поля. Магнитное поле является принципиально трехмерным и каждая из его компонент зависит только от горизонтальных координат. Уравнение для вертикальной составляющей магнитного поля и уравнение бездивергентности являются важными в магнитогидродинамическом приближении мелкой воды во внешнем магнитном поле не только как технические детали, необходимые для получения правильного следствия из условия бездивергентности для приближения мелкой воды, но также они показывают существование вертикальной компоненты магнитного поля, уравнение для которой отделяется от уравнений мелкой воды.

В работе рассматриваются два типа течений: течения во внешнем вертикальном магнитном поле и течения при наличии горизонтального магнитного поля. Для линейной задачи приведены дисперсионные соотношения для волн Россби в вертикальном магнитном поле и при наличии горизонтального магнитного поля. Основной механизм образования волн Россби заключается в сдвиге вращающегося потока вследствие того, что сила Кориолиса изменяется в зависимости от широты. Показано, что в частном случае отсутствия внешнего магнитного поля динамика волн в слое плазмы аналогична динамике волн в нейтральной жидкости. Мы исследуем взаимное влияние волновых пакетов во вращающейся магнитной гидродинамике мелкой воды на бета-плоскости. Качественный анализ дисперсионных кривых показывает наличие трехволновых нелинейных взаимодействий магнитных волн Россби в обоих случаях: в случае вертикального внешнего магнитного поля и в случае наличия горизонтального магнитного поля. Для описания нелинейного взаимодействия волн использован асимптотический метод многомасштабных разложений. Асимптотическим методом многомасштабных разложений выведены нелинейные уравнения взаимодействия для медленно меняющихся амплитуд, описывающие трехволновые взаимодействия в вертикальном внешнем магнитном поле и трехволновые взаимодействия волн в горизонтальном магнитном поле. Анализ полученных нелинейных уравнений, описывающих трехволновые взаимодействия, показал существование двух типов неустойчивостей: распадные неустойчивости и параметрическое усиление волн для каждого из рассматриваемых случаев. Найдены инкременты неустойчивостей и коэффициенты параметрического усиления для соответствующих процессов.

Исходные уравнения. Линейные волны. Качественный анализ.

Уравнения магнитной гидродинамики в приближении мелкой воды являются следствием полной системы трехмерных уравнений магнитной гидродинамики. Уравнения мелкой воды получены для тонкого слоя жидкости со свободной поверхностью в однородном поле силы тяжести, во вращающейся системе отсчета с параметром Кориолиса f во внешнем вертикальном магнитном поле B_0,и записываются в следующем виде

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h v_x}{\partial x} + \frac{\partial h v_y}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial h v_y}{\partial t} + \frac{\partial\left(h {v_x}^2 - h {B_x}^2\right)}{\partial x} + gh\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial\left(h v_x v_y - h B_x B_y\right)}{\partial y} + B_0 B_x - f h v_y = 0 \\ \frac{\partial h v_y}{\partial t} + \frac{\partial\left(h v_x v_y - h B_x B_y\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(h {v_y}^2 - h {B_y}^2\right)}{\partial y} + gh\frac{\partial h}{\partial y} + B_0 B_y + f h v_x = 0 \\ \frac{\partial h B_x}{\partial t} + \frac{\partial\left(h B_x v_y - h B_y v_x\right)}{\partial y} + v_x B_0 = 0 \\ \frac{\partial h B_y}{\partial t} + \frac{\partial\left(h B_y v_x - h B_x v_y\right)}{\partial x} + v_y B_0 = 0 \\ \frac{\partial B_z}{\partial t} + B_0\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) = 0 \\ \frac{\partial h B_x}{\partial x} + \frac{\partial h B_y}{\partial y} + B_z = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Первые пять уравнений системы (1) записаны относительно переменных h - высоты слоя, v_x, v_y - средних по высоте горизонтальных скоростей, B_x, B_y - средних по высоте слоя горизонтальных магнитных полей; g - ускорение свободного падения, f - параметр Кориолиса, B_0 - внешнее вертикальное магнитное поле. Система из первых пяти уравнений является результатом интегрирования трехмерных уравнений магнитной гидродинамики вдоль вертикальной координаты z. Мы полагаем полное давление (гидродинамическое и магнитное) гидростатическим. Первое уравнение системы (1) - следствие уравнения непрерывности, второе и третье уравнения системы (1) получены в результате усреднения по высоте уравнений для изменения импульса, четвертое, пятое и шестое - уравнения изменения магнитного поля, последнее уравнение системы (1) - условие бездивергентности магнитного поля, усредненное по высоте. В пределе, когда $B_0 = 0$ первые пять уравнений системы (1) сводятся к классическим магнитогидродинамическим уравнениям мелкой воды. Вертикальную динамику МГД течений в приближении мелкой воды с внешним вертикальным магнитным полем, которая значительно отличается от случая без вертикального магнитного поля, описывают последние два уравнения. В традиционном выводе МГД уравнений мелкой воды из полной системы трехмерных уравнений магнитной гидродинамики вертикальная составляющая магнитного поля принимается равной нулю. Отметим, что наличие вертикального магнитного поля приводит к существенным изменениям горизонтальной динамики магнитного поля в приближении мелкой воды. Горизонтальное магнитное поле соленоидально для случая течений без внешнего магнитного поля, в присутствие же внешнего вертикального магнитного поля это не так. Вертикальные изменения магнитного поля отличны от нуля, и условие бездивергентности содержит вертикальную составляющую B_z. Поэтому, чтобы полностью описать динамику магнитного поля необходимо добавить уравнение для вертикального изменения магнитного поля. Таким образом, магнитное поле является принципиально трехмерным и каждая из его компонент зависит только от горизонтальных координат. Условие бездивергентности магнитного поля выполняется тождественно как следствие уравнений для изменения магнитного поля и используется для задания корректных начальных условий. Последние два уравнения системы (1) являются важными в МГД приближении мелкой воды во внешнем магнитном поле не только как технические детали, необходимые для получения правильного следствия из условия бездивергентности для приближения мелкой воды, но также они показывают существование - компоненты магнитного поля, уравнение для которой отделяется от уравнений мелкой воды. Система из первых пяти уравнений системы (1) является замкнутой и используется для анализа линейных волн и нелинейных взаимодействий.

Величина вертикальной компоненты вращения изменяется в зависимости от широты θ, и это существенно влияет на динамику течений. Для описания этого изменения мы используем приближение -плоскости, а именно, изменения параметра Кориолиса f при малых изменениях широты в этом приближении представляются в следующем виде:

$$f = 2\Omega sin\theta \approx 2\Omega sin\theta_0 + 2\Omega(\theta - \theta_0)cos\theta_0 = f_0 + \beta y \tag{2}$$

Здесь Ω - угловая скорость вращения слоя, $f_0 = 2\Omega sin\theta_0$ и $\beta = \partial f/\partial y$. С учетом зависимости параметра Кориолиса от широты (2) уравнения импульса в системе (1) описывают сферичность течения. Будем рассматривать в качестве исходных уравнений для исследования волн Россби следующую систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hv_x}{\partial x} + \frac{\partial hv_y}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial hv_y}{\partial t} + \frac{\partial\left(hv_x{}^2 - hB_x{}^2\right)}{\partial x} + gh\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial(hv_xv_y - hB_xB_y)}{\partial y} + B_0B_x - (f_0 + \beta y)hv_y = 0 \\ \frac{\partial hv_y}{\partial t} + \frac{\partial(hv_xv_y - hB_xB_y)}{\partial x} + \frac{\partial\left(hv_y{}^2 - hB_y{}^2\right)}{\partial y} + gh\frac{\partial h}{\partial y} + B_0B_y + (f_0 + \beta y)hv_x = 0 \\ \frac{\partial hB_x}{\partial t} + \frac{\partial(hB_xv_y - hB_yv_x)}{\partial y} + v_xB_0 = 0 \\ \frac{\partial hB_y}{\partial t} + \frac{\partial(hB_yv_x - hB_xv_y)}{\partial x} + v_yB_0 = 0 \end{cases} \tag{3}$$

В длинноволновом приближении $\omega \ll f$, дисперсионное соотношение для линейных решений системы (3) принимает вид:

$$\omega = -\frac{\left(\frac{B_0}{H}\right)^2\left(gHk^2 + \left(\frac{B_0}{H}\right)^2\right)}{gH\beta k_x} \tag{4}$$

и описывает волны Россби в приближении мелкой воды, распространяющиеся противоположно направлению k_x. Основный механизм их образования заключается в сдвиге вращающегося потока вследствие того, что сила Кориолиса изменяется в зависимости от широты.

Заметим, что в случае отсутствия внешнего вертикального магнитного поля линеаризованныt уравнения для магнитного поля приводятся к тривиальному виду $\partial B_x/\partial t = 0$ и $\partial B_y/\partial t = 0$. Таким образом, волна перестает быть магнитогидродинамической и дисперсионное соотношение описывает динамику только гидродинамической параметров.

Проанализируем качественно полученные дисперсионные кривые для того, чтобы выяснить возможность реализации слабонелинейных взаимодействий. Для того чтобы волны Россби испытывали трехволновые взаимодействия необходимо, чтобы три волны удовлетворяли условию синхронизма:

$$\omega(k_1) + \omega(k_2) = \omega(k_1 + k_2) \tag{5}$$

Таким образом, найдутся такие две волны с волновыми векторами k_1 и k_2 такими, что условие (5) удовлетворяется. В данном случае это так. Аналогичное условие выполнено и для случая горизонтального внешнего поля, что означает наличие трехволновых взаимодействий и в этом случае.

Трехволновые взаимодействия и неустойчивости

Для получения уравнений трехволновых взаимодействий воспользуемся асимптотическим методом многомасштабных разложений. Решение системы (2) представим в виде ряда по малому параметру ε:

$$u = \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \ldots \tag{6}$$

где u_1 - решение линеаризованной системы (2), u_2 - поправка, описывающая влияние квадратичной нелинейности. Выписав слагаемые, пропорциональные ε^2, получим систему линейных неоднородных дифференциальных уравнений относительно u_2, содержащую в правой своей части резонансные слагаемые, приводящие к линейному росту решения (по времени и по координате). Таким образом, нарушается условие $\varepsilon^2 u_2 \ll \varepsilon u_1$ на больших масштабах. Поэтому, для того чтобы получить нелинейную поправку, введем зависимость амплитуды волны от больших временных и больших пространственных масштабов в виде $u_1(T_1, X_1, Y_1)\exp(i(k_x X_0 + k_y Y_0 - \omega T_0))$. Эволюционное уравнение для медленно меняющейся амплитуды обеспечивает равномерную сходимость асимптотического ряда. Перейдем, следовательно, от аргументов (t, x, y) к "быстрым" (T_0, X_0, Y_0) и "медленным" аргументам (T_1, X_1, Y_1) в соответствии с соотношениями

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \dfrac{\partial}{\partial T_1} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial X_0} + \varepsilon \dfrac{\partial}{\partial X_1} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial Y_0} + \varepsilon \dfrac{\partial}{\partial Y_1} \end{cases} \tag{7}$$

В итоге мы получили систему из трех уравнений на амплитуды взаимодействующих волн α, β, γ:

$$\begin{cases} s\alpha = f_1 \beta\gamma \\ s\beta = f_2 \gamma\alpha \\ s\gamma = f_3 \alpha\beta \end{cases} \tag{8}$$

В системе (8) параметры s, f_1, f_2, f_3 однозначно определяются из начальных условий задачи. Для случая горизонтального магнитного поля система аналогична. Используем систему (8) для качественного анализа возможных неустойчивостей при взаимодействии волн Россби. Исходя из общего вида системы уравнений для волн малых амплитуд (8), возможны два типа неустойчивостей.

Рассмотрим случай, когда амплитуда одной из трех взаимодействующих волн в начальный момент много больше амплитуд двух других волн $\alpha \gg \beta, \gamma$, амплитуду первой волны можно считать постоянной $\alpha = \alpha_0$, при этом обратным влиянием можно пренебречь. Решение полученной линейной системы уравнений ищем в виде:

$$\binom{\beta}{\gamma} = \binom{\beta\prime}{\gamma\prime} \exp(i\varphi T_1)$$

Откуда инкремент

$$\Gamma = \frac{\sqrt{f_2 f_3}}{a}\alpha_0 \qquad (9)$$

Где f_2, f_3 ределяются из начальных условий задачи. Таким образом, одна магнито-Россби волна с волновым вектором k_1 и частотой $\omega_1 = \omega(k_1)$ распадается на две магнито-Россби волны с волновыми векторами $k_2 = k_3 = k_1/2$ и частотами $\omega_2 = \omega_3 = \omega_1/2$ с инкрементом (9).

Рассмотрим теперь случай, когда амплитуда одной из взаимодействующих волн много меньше амплитуд двух других волн $\alpha \ll \beta, \gamma$, так что можно считать амплитуды β и γ постоянными $\beta = \beta_0$ и $\gamma = \gamma_0$. Уравнение для амплитуды α принимает вид:

$$s\alpha = f_1 \beta_0 \gamma_0$$

Ищем решение в виде:

$$\alpha = \alpha' \exp(i\vartheta T_1)$$

Подставляя решение в этом виде, получаем выражение для коэффициента усиления:

$$\Gamma = \frac{f_1 \beta_0 \gamma_0}{a} \qquad (10)$$

Где f_1, a однозначно определяются из начальных условий задачи. В данном случае параметрического усиления две начальные магнито-Россби волны с волновыми векторами k_1 и k_2 и частотами $\omega_1 = \omega(k_1)$ и $\omega_2 = \omega(k_2)$ усиливают магнито-Россби волну с волновым вектором $k_3 = k_1 + k_2$ и частотой $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ с коэффициентом усиления (10).