УДК 515.12

Некоторые свойства ожерелий Антуана

О.Д.Фролкина[1]

[1]Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

Пусть $C \subset [0;1]$ - стандартное канторово множество. Вложение $f : C \to R^n$ называется *ручным*, если существует такой гомеоморфизм h пространства R^n на себя, что $h(f(C))$ содержится в некоторой прямой, и *диким* в противном случае.

При $n = 1;2$ всякое вложение канторова множества в R^n является ручным. Для $n \geq 3$ известно много примеров диких вложений; первые примеры диких канторовых множеств построены для $n = 3$ Урысоном [1, с. 331] и Антуаном [2], для $n \geq 3$ конструкция Антуана обобщена Бланкиншипом [3].

Задача классификации диких канторовых множеств является открытой. Известные частичные результаты касаются лишь некоторых специальных классов вложений. В настоящем докладе представлены некоторые новые свойства ожерелий Антуана в R^3.

Ожерельем Антуана мы называем специальное вложение канторова множества в R^3. В отличие от стандартного ожерелья Антуана (см., например, [4, глава IV, § 4]), где на каждом шаге вставляется по 4 звена, у общего ожерелья Антуана на каждом последующем шаге разрешается произвольное конечное число звеньев (свое в каждой компоненте предыдущего шага). Уточним это.

Определение. *Ожерельем Антуана* называется такое канторово множество $A \subset R^3$, которое может быть получено как пересечение последовательности $\{M_k\}$, $k \geq 0$, компактных 3-многообразий в R^3 со свойствами: 1) M_0 - стандартное полноторие; каждое M_k есть конечный набор дизъюнктных полноториев; 2) $M_{k+1} \subset M_k$ при каждом k; 3) для каждой компоненты T многообразия M_k пересечение $M_{k+1} \cap T$ есть набор из не менее чем 4 полноториев, образующих в T простую цепочку (см. [4], [5]). Последовательность $\{M_k\}$ называется *определяющей последовательностью* для ожерелья A.

Классификация ожерелий Антуана с точностью до объемлемой гомеоморфности получена Шером [6]. Мы изучаем вопрос объемлемой вложимости одного ожерелья Антуана в другое.

Заметим, что для произвольной компоненты T многообразия M_k множество $A \cap T$ само является ожерельем Антуана.

Теорема 1. Пусть $A, B \subset R^3$ - два ожерелья Антуана, определенные последовательностями
$\{M_k\}$ и $\{N_k\}$ соответственно. Пусть h - такой гомеоморфизм R^3 на себя, что $h(A) \subset B$. Тогда найдется такой номер j и такая компонента T многообразия N_j, что $h(A) = B \cap T$.

Таким образом, ожерелья Антуана не имеют других подожерелий, кроме очевидных, типа $B \cap T$.

Заметим, что такой гомеоморфизм $(R^3, A) \cong (R^3, B \cap T)$ обязан «сохранять допредельные уровни», т.е. для каждой компоненты $P \subset M_k$ существует такая компонента $Q \subset N_{k+j}$, что $h(A \cap P) = B \cap Q$; компоненты P, P' зацеплены тогда и только тогда, когда зацеплены соответствующие им компоненты Q, Q' (см. [6], [7, Lemma 13]).

Определение. Пусть F - семейство множеств в R^3. Множество $U \subset R^3$ называется объемлемо универсальным для семейства F, если для каждого $M \in F$ существует такой гомеоморфизм h_M пространства R^3 на себя, что $h_M(M) \subset U$.

Известно, что в классе всех канторовых множеств нет объемлемо универсального, см. [8], [9]. Это связано с тем, что произвольное канторово множество может иметь очень сложную структуру - быть пересечением последовательности тел с ручками, число которых не ограничено в совокупности.

Теорема 2. В классе всех ожерелий Антуана нет объемлемо универсального ожерелья.

Предложение 3. Для любого счетного набора ожерелий Антуана существует объемлемо универсальное ожерелье Антуана.

Заметим в заключение, что два диких канторовых множества в R^3 могут быть нетривиально зацеплены. Например, если полнотория M_0 и N_0 образуют зацепление Хопфа, то построенные в них ожерелья Антуана $A = \cap M_k$ и $B = \cap N_k$ также зацеплены нетривиально (см. [5], [7, Lemma 11]).

Предложение 4. Пусть $A = \cap M_k$, $B = \cap N_k$, $K = \cap L_k$ - такие ожерелья Антуана, что полнотория M_0, N_0, L_0 образуют зацепление Борромео. В этом случае никакие два из ожерелий A, B, K не зацеплены, но все три зацеплены. Более того, не существует 2-сферы $S^2 \subset R^3$, отделяющей K от $A \cup B$.

Работа поддержана грантом РФФИ (проект N 15-01-06302).

Литература

1. *Урысон П.С.* Труды по топологии и другим областям математики. Т. 1. М.: ГИТТЛ, 1951. 512 с.
2. *Antoine L.* Sur la possibilité d`étendre l`homéomorphie de deux figures à leur voisinages // C.R.Acad. Sci. Paris. 1920. V. 171. P. 661-663.
3. *Blankinship W.A.* Generalization of a construction of Antoine // Ann. Math. (2) 1951. V. 53. P. 276-297.
4. *Келдыш Л.В.* Топологические вложения в евклидово пространство // Тр. МИАН СССР. 1966. Т.81. С. 3-184.
5. *Wright D.G.* Rigid sets in manifolds // Geometric and Algebraic Topology, Banach Cent. Publ. 1986. V. 18. P. 161-164.
6. *Sher R.B.* Concerning wild Cantor sets in E^3 // Proc. Amer. Math. Soc. 1968. V. 19. P. 1195-1200.
7. *Ortega R., Sánchez-Gabites J.J.* A homotopical property of attractors // Topol. Methods Nonlinear Anal. 2015. V. 46, N 2. P. 1089-1106.
8. *Bothe H.G.* Zur Lage null- und eindimensionaler Punktmengen // Fund.Math. 1966. V.58. P. 1-30.
9. *Wright D.G.* Ambiently universal sets in E^n // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. V. 277, N 2. P. 655-664.